頭腦體操

■ 蔡文景

一、奇妙的數

底下的算式都具有規律性，請利用這個規律寫出答案：

甲

1^2	=	1
11^2	=	121
111^2	=	12321
1111^2	=	
11111^2	=	
111111^2	=	
1111111^2	=	
11111111^2	=	
111111111^2	=	

乙

9^2	=	81
99^2	=	9801
999^2	=	998001
9999^2	=	
99999^2	=	
999999^2	=	
9999999^2	=	
99999999^2	=	
999999999^2	=	

丙

6×9	=	54
66×99	=	6534
666×999	=	665334
6666×9999	=	
66666×99999	=	
666666×999999	=	
6666666×9999999	=	
66666666×99999999	=	
$666666666 \times 999999999$	=	

丁

12345679 × 9	=	111111111
12345679 × 18	=	222222222
12345679 × 27	=	333333333
12345679 × 36	=	
12345679 × 45	=	
12345679 × 54	=	
12345679 × 63	=	
12345679 × 72	=	
12345679 × 81	=	

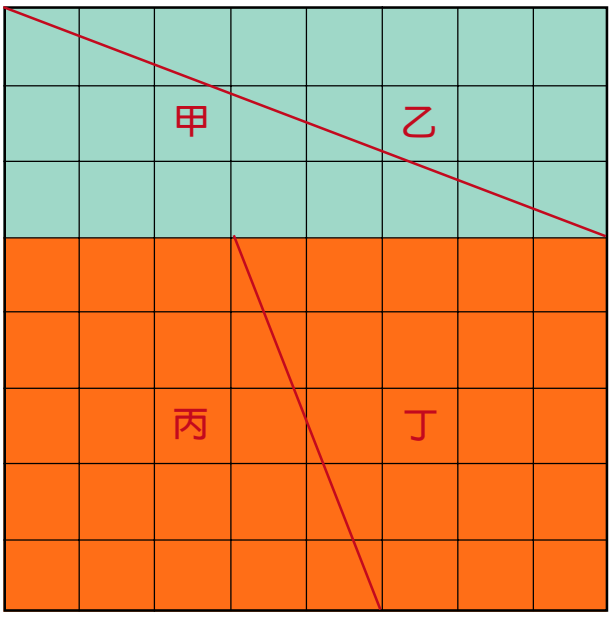
戊

123456789 × 9	=	1111111101
123456789 × 18	=	2222222202
123456789 × 27	=	3333333303
123456789 × 36	=	
123456789 × 45	=	
123456789 × 54	=	
123456789 × 63	=	
123456789 × 72	=	
123456789 × 81	=	

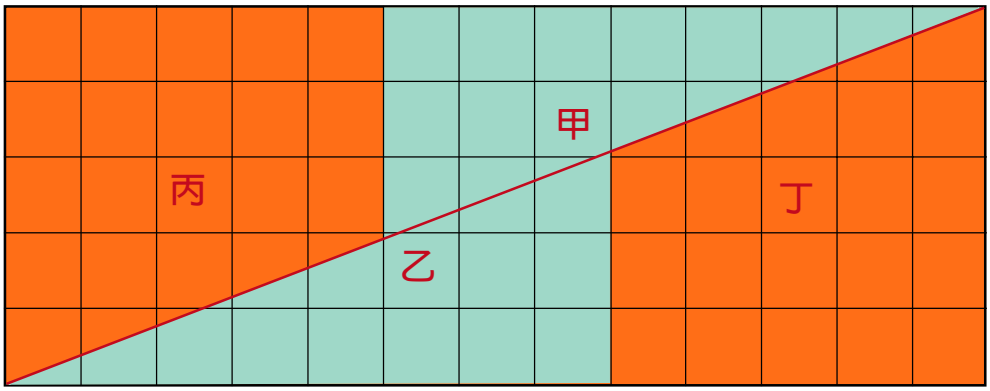
二、問題出在哪裡？

甲、64 ≠ 65：

甲圖是一個8×8的正方形，面積爲64平方單位，我們將它分割成如下的四塊，兩塊全等的直角三角形，兩股長分別爲3和8；兩塊全等的梯形，兩底長分別爲3和5，高爲5。再重新將這四塊拼成一個長方形(乙圖)，結果面積變成65平方單位，爲什麼原來正方形的面積和重新拼合後的長方形面積會不相同呢？多出來的這1平方單位到底是怎麼一回事呢？



甲圖　一個8×8的正方形



乙圖　由甲圖重新拼湊出的長方形

乙、季諾的詭辯：

假設一隻烏龜和一隻兔子在同一條直線上賽跑，兔子每秒鐘跑 10 公尺，而烏龜每秒鐘可爬行1公尺，若一開始時，兔子先讓烏龜爬行100公尺後再開始起跑，由於兔子每秒鐘可以追上烏龜

$10 - 1 = 9$ (公尺)

因此只需

$100 \div 9 = 11\frac{1}{9}$(秒)

即可追上烏龜。

可是古希臘時代有位哲學家季諾(Zeno,496-430B.C)曾提出類似於下列的說法：「當兔子跑了100公尺時，花了10秒鐘，而在這10秒鐘裏，烏龜往前爬行了10公尺，當兔子再跑到10公尺時，又用去了1秒鐘，此段時間內，烏龜又爬行了1公尺，當兔子再往前跑1 公尺時，又花費了 $\frac{1}{10}$ 秒鐘，於是烏龜又爬行了 0.1 公尺.....，如此循環下去，則兔子永遠不可能追上烏龜。」顯然季諾的說法和我們的認知有很大的差距，但是他的推論也看不出有什麼漏洞，那麼問題究竟出在哪裡呢？

丙、還有一元呢？

三位客人來到一間冰果店，叫了3杯西瓜汁後，便問服務生要收多少錢?服務生說30元，於是三人各付10元給服務生，當服務生拿錢交給櫃台時才發現店裡面正要做促銷活動，3杯西瓜汁只收 25 元，於是就走回去要退錢給客人，這時服務生邊走邊想：「三個人分五元不是很難分嗎？不如我拿2元當小費，再退還給每個人1元，這不是皆大歡喜。」正當服務生高興的退完錢後卻發現到有點不大對勁，因爲三位客人各自付了9元，也就是總共付了 27 元，而他自己拿走 2 元，這樣子總共是 29 元，但是這三個客人最初明明付了 30 元，那還有 1 元跑到哪裏去了呢？

丁、少了 7000 元：

某茶商批進上等和中等兩種茶葉各 30 斤，該茶商因爲有事要外出，特地交代夥計上等茶葉兩斤賣 7000 元，中等茶葉三斤賣 7000 元。

夥計心想，這樣子多麼麻煩，倒不如我將兩種茶葉混合出售，每5斤賣14000元，這樣子不是省事多了。由於這批茶葉物美價廉，因此很快地就銷售一空，夥計算一算總共賣了

$(30+30) \div 5 \times 14000 = 168000$ (元)。

傍晚茶商回來結帳，算一算總共應該是

$30 \div 2 \times 7000 + 30 \div 3 \times 7000$

$= 175000$(元)

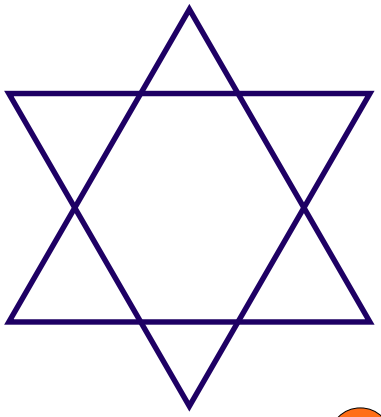
和夥計賣的錢數相差了

$175000 - 168000 = 7000$(元)

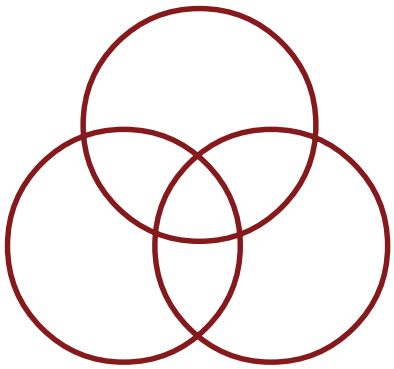
到底這 7000 元跑到哪裡去了呢？

三、一筆劃問題

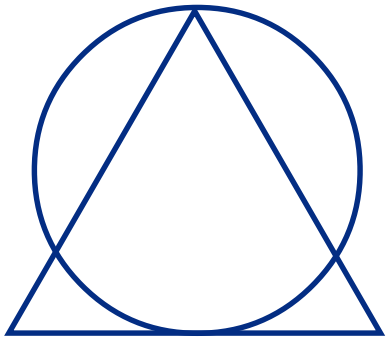
你能筆尖不離紙，一筆劃出下面的圖形嗎（不能重複走過的線路）？



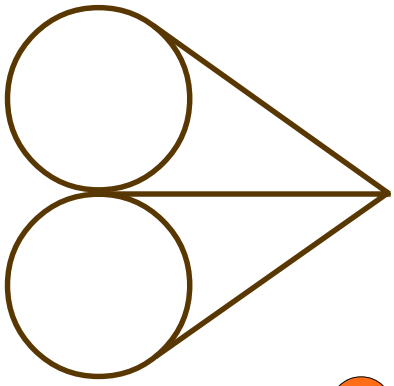
甲



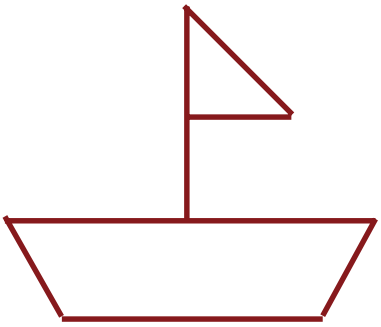
乙



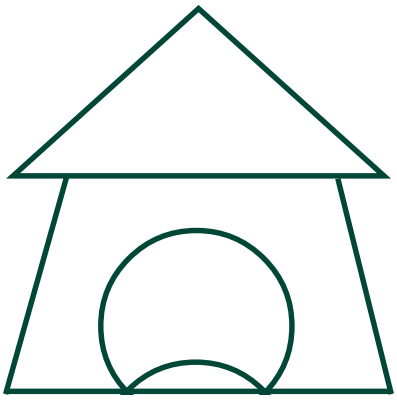
丙



丁



戊



己

解答A

一、 奇妙的數

甲

1^2	=	1
11^2	=	121
111^2	=	12321
1111^2	=	1234321
11111^2	=	123454321
111111^2	=	12345654321
1111111^2	=	1234567654321
11111111^2	=	123456787654321
111111111^2	=	12345678987654321

乙

9^2	=	81
99^2	=	9801
999^2	=	998001
9999^2	=	99980001
99999^2	=	9999800001
999999^2	=	999998000001
9999999^2	=	99999980000001
99999999^2	=	9999999800000001
999999999^2	=	999999998000000001

丙

6 × 9	=	54
66 × 99	=	6534
666 × 999	=	665334
6666 × 9999	=	66653334
66666 × 99999	=	6666533334
666666 × 999999	=	666665333334
6666666 × 9999999	=	66666653333334
66666666 × 99999999	=	6666666533333334
666666666 × 999999999	=	66666665333333334

丁

12345679 × 9	=	111111111
12345679 × 18	=	222222222
12345679 × 27	=	333333333
12345679 × 36	=	444444444
12345679 × 45	=	555555555
12345679 × 54	=	666666666
12345679 × 63	=	777777777
12345679 × 72	=	888888888
12345679 × 81	=	999999999

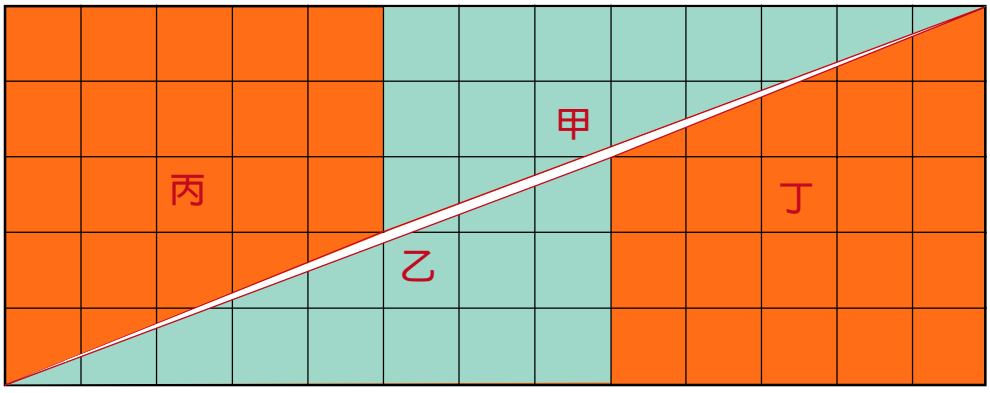
戊

123456789 × 9	=	1111111101
123456789 × 18	=	2222222202
123456789 × 27	=	3333333303
123456789 × 36	=	4444444404
123456789 × 45	=	5555555505
123456789 × 54	=	6666666606
123456789 × 63	=	7777777707
123456789 × 72	=	8888888808
123456789 × 81	=	9999999909

二、問題出在哪裡？

甲、64 ≠ 65：

當我們重新拼成一個長方形時，這個長方形的中間並非完全密合而是有一些空隙(丙圖)，而多出來的 1 平方單位剛剛好是這些空隙的面積和。



丙圖　白色區域就是沒有密合多出來的地方

乙、季諾的詭辯：

兔子追上烏龜共需

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+....(秒)$$

這個算式的值要如何計算呢？我們可將這個問題的想法轉變爲9個人分吃100塊的大餅，很容易地，每個人恰可分到$\frac{100}{9}$塊。不過在此我們將分法略作改變，步驟如下：

■步驟 1：每個人先分 10 塊大餅，則大餅剩下 10 塊。

■步驟 2：剩下的 10 塊大餅每個人各分 1 塊，則大餅剩下 1 塊。

■步驟3：將剩下的1塊大餅切成10等分，每個人各拿1份($\frac{1}{10}$塊)，則大餅剩下 $\frac{1}{10}$ 塊。

■步驟 4：將剩下的 $\frac{1}{10}$ 塊大餅再切成 10 等分，每個人再各拿 1 份($\frac{1}{100}$ 塊)，則大餅剩下 $\frac{1}{100}$ 塊。

每次都將剩餘的大餅切成10等分，9個人各拿1份，剩下1份，如此一直下去，這樣子，每個人所拿到的大餅共有

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+....=11\frac{1}{9}(塊)$$

這個式子與兔子追上烏龜需的時間是一樣的,因此可得

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+....=11\frac{1}{9}$$

在龜兔賽跑的故事中，問題的癥結就在於”時間”，我們將有限的時間($11\frac{1}{9}$秒)誇大成無限的時間(永遠)，事實上，兔子只需要$11\frac{1}{9}$秒鐘的時間即可趕上烏龜。

丙、還有一元呢？

事實上並沒有錯，三位客人總共付了

30-3=27(元)

而櫃檯收到 25 元，服務生拿了 2 元，總共也是

25+2=27(元)

丁、少了 7000 元：

上等茶葉每2斤爲一單位賣出，共有15個單位；中等茶葉每3斤爲一單位賣出，共有10個單位。當中等茶葉賣完時，上等茶葉只賣了10個單位，還剩下 5 個單位(10 斤)，這 10 斤上等茶葉應該賣　7000 × 5=35000 元

可是夥計是以平均 1 斤　　14000 ÷ (2+3)=2800(元)

的價格賣出，因此只賣了　　2800 × 10=28000(元)

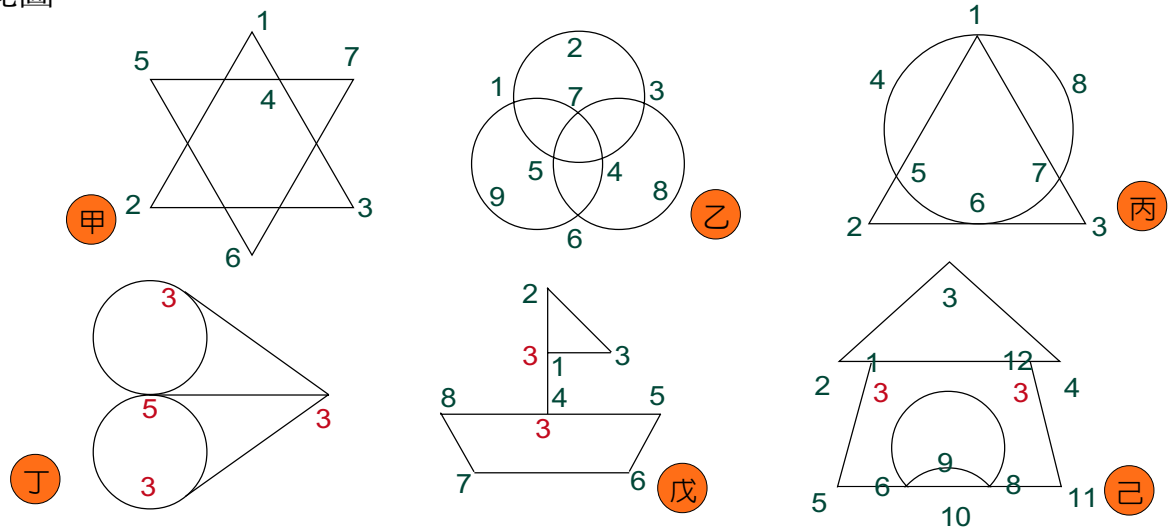
所以相差了 7000 元。

三、一筆劃問題

能一筆劃的圖形所需具備的第一個條件是『連通圖』，所謂的連通圖指的是圖形的各個部分都有邊相連，不過，並不是所有的連通圖都可以一筆劃，是不是可以一筆劃是由圖形的奇點和偶點的數目來決定。所謂的奇點指的是和該點連接的線總共有奇數條，而偶點指的是和該點連接的線總共有偶數條。能夠一筆劃完成的連通圖至少須具備下列其中一個性質：

1.所有的點都是偶點的連通圖：以任一偶點爲起點，最後一定能以這個點爲終點畫完此圖。

2.恰有兩個奇點的連通圖：以其中一個奇點爲起點，另一個奇點終點必能畫完此圖。



紅色字體表示和該奇點連接的線的數目。

(甲) 1 --> 2 --> 3 --> 4 --> 5 --> 6 --> 7 --> 4 --> 1

(乙) 1 --> 2 --> 3 --> 4 --> 5 --> 1 --> 7 --> 4 --> 6 --> 5 --> 7 --> 3 -->8 --> 6 --> 9 --> 1

(丙) 1 --> 2 --> 3 --> 1 --> 4 --> 5 --> 6 --> 7 --> 8 --> 1

(丁) 因為奇點超過 2 個，所以無法一筆劃完成。

(戊) 1 --> 2 --> 3 --> 1 --> 4 --> 5 --> 6 --> 7 --> 8 --> 4

(己) 1 --> 2 --> 3 --> 4 --> 1 --> 5 --> 6 --> 7 --> 8 --> 9 -->6 --> 10 --> 8 --> 11 -->12

（答案不只一種，僅提供一種當作參考）