數字方塊

蔡淑英

壹 前言

「數字方塊」的問題源起於民國八十二年六月中國時報中所介紹到的一則數學益智遊戲，問題的本身它所需要的能力只要會「減法」即可。當筆者看到這個問題時，發現「數字方塊」的問題本身隱藏著許多的祕密，它像謎題一般的耐人尋味。

這個問題對於「樂於深入探討問題」、「喜歡追根究柢」、「喜歡問爲什麼」的兒童而言，問題本身所隱藏的樂趣更是無窮。例如筆者所指導的第 34 屆全國數學科初小組第一名的作品「數字方塊」以及全國第 35 屆數學科初小組第二名的作品「從數字方塊到數字八卦」。這兩件作品都是筆者在市立師院附小對全校小朋友介紹完這個遊戲規則後，中年級的小朋友經由實作，並應用科學的基本方法去控制變因、操縱變因，因而找到隱藏在「數字方塊」中的規律，進而進行「數字方塊」問題的推廣研究。

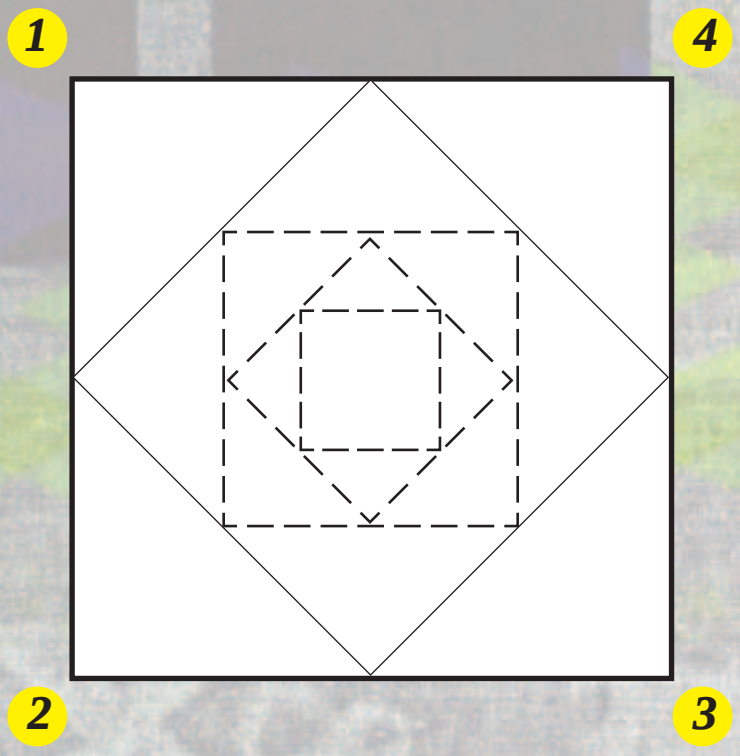
這些年來，筆者每年都將這個遊戲，利用各種研習的機會將它介紹給台北市的小學老師以及自己的學生。「數字方塊」的問題，它像謎題一樣的吸引著每一個人，至今沒有改變。只要接觸到它，每一個人都將陶醉於數學解題的快樂情境中，每一個人都將會有自己的創意與新發現，彷彿自己是數學天才一般。

貳 「數字方塊」的運算規則

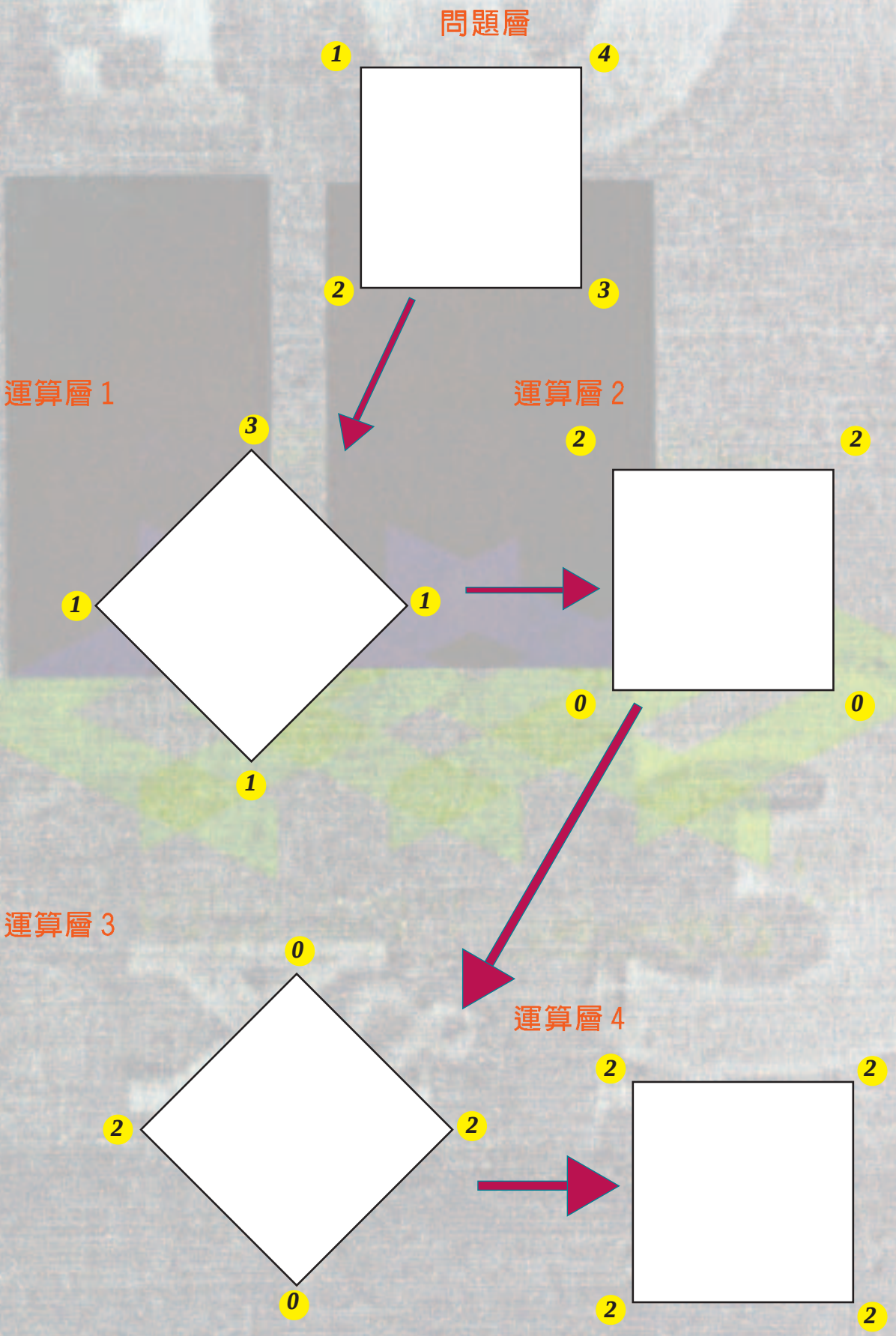
美麗的幾何圖形，與數字的運算，這之間居然有著奇妙的關係！你相信嗎？只要在一個正方形的四個頂點處各寫下一個正數，如１，２，３，4……，然後算出相鄰兩角數字的差，寫在四條邊線的中點，再以四個中點畫一個新的正方形，繼續重複這個程序，最後一定會出現一個四個角數字都相同的正方形。你相信嗎？請動手畫畫看！

下列這個方塊，四個頂點處所寫下的正數分別是１，２，３，４。這個「數字方塊」的問題，它需要再畫四個新方塊後，才會出現四個角都是相同數字的正方形。你相信嗎？請動手畫畫看！

爲了方便計數運算層所產生的新方塊個數，建議你可以用不同顏色的色筆來進行畫新正方形的活動。每一個新正方形給一種顏色。

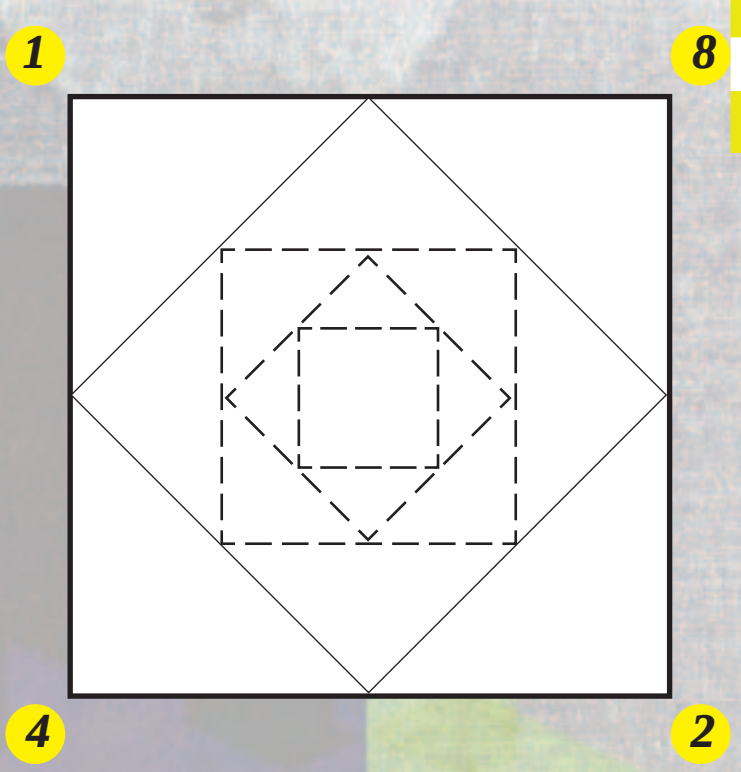


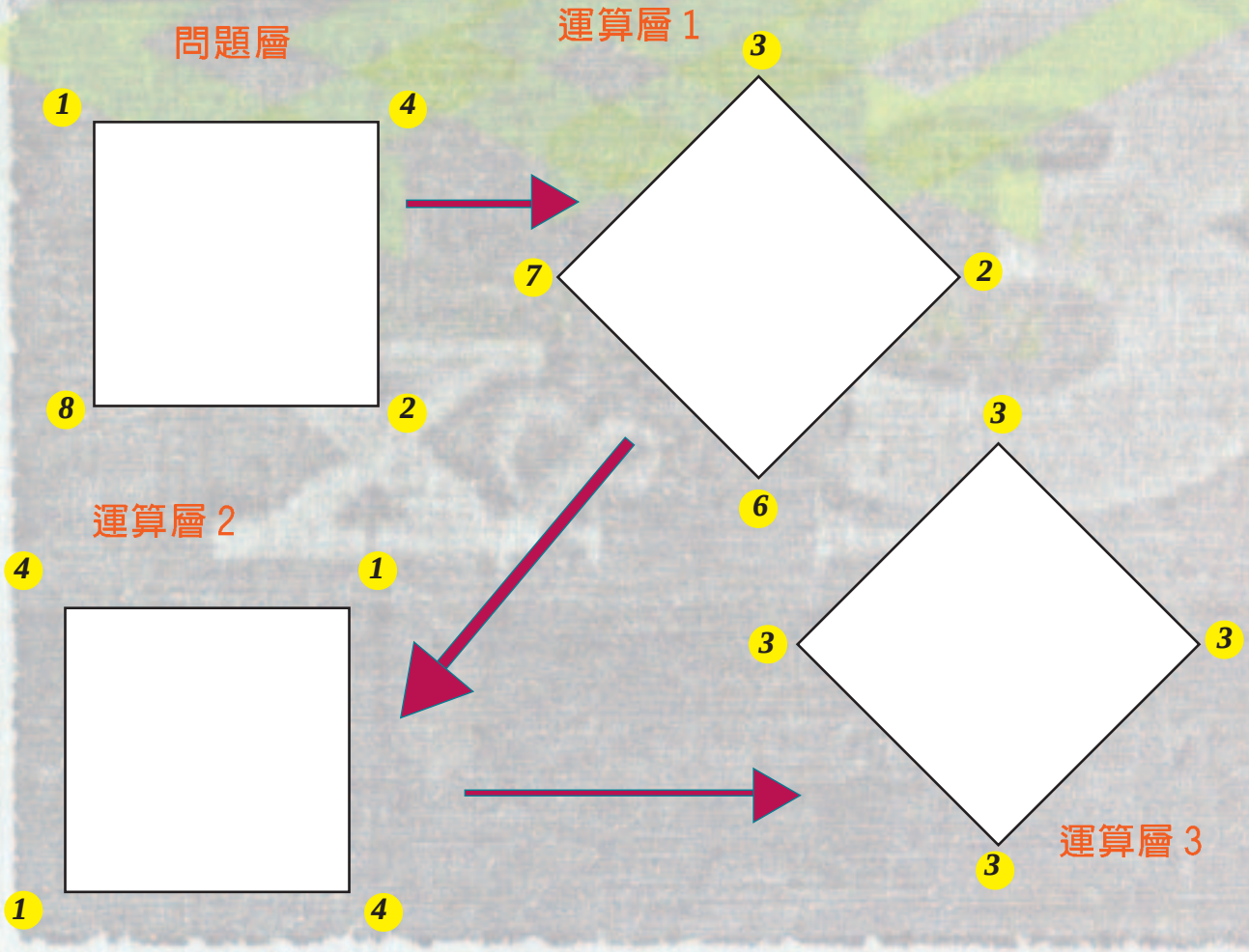
請將你計算的結果，和下面的解答核對一下！除了問題層以外，經由你運算過後所產生的新正方形，我們統稱爲運算層。每一個新方塊上的頂點數字與下列各運算層所呈現的數字一樣嗎？是否到第四個運算層才會出現四個角數字都相同的正方形？如果是，我們就可以說這個數字方塊的問題，需要再畫四個新方塊後，才會出現四個角都是相同數字的正方形。下圖是上面問題的答案。


問題層
1
4
2
3
運算層 1
3
1
1
1
運算層 2
2
2
0
0
運算層 3
0
2
2
0
運算層 4
2
2
2
2

改變問題層四個頂點處的數字分別是１，４，２，８。這個「數字方塊」的問題，它只需要再畫三個新方塊後，就會出現四個角都是相同數字的正方形。你相信嗎？請動手畫畫看！

請將你計算的結果，和下面的解答核對一下！除了問題層以外，各運算層所出現的每一個新方塊上的頂點數字與下列各運算層所呈現的數字一樣嗎？是否到第三個運算層才會出現四個角數字都相同的正方形？如果是，我們就可以說這個數字方塊的問題，需要再畫三個新方塊後，才會出現四個角都是相同數字的正方形。

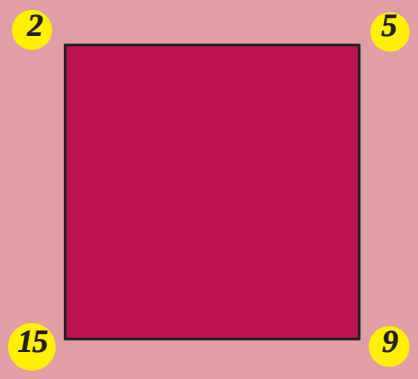




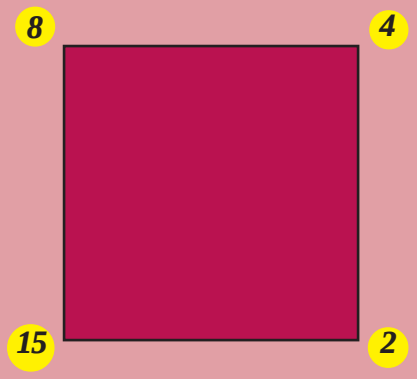
參 建造一個多層的「數字方塊」問題

任選1，2，3，4……20中的四個數字，寫在數字方塊的四個角，請你算一算，並畫一畫，看誰能設計問題層的四個數字，使運算層方塊結束的個數最多，加油喔！

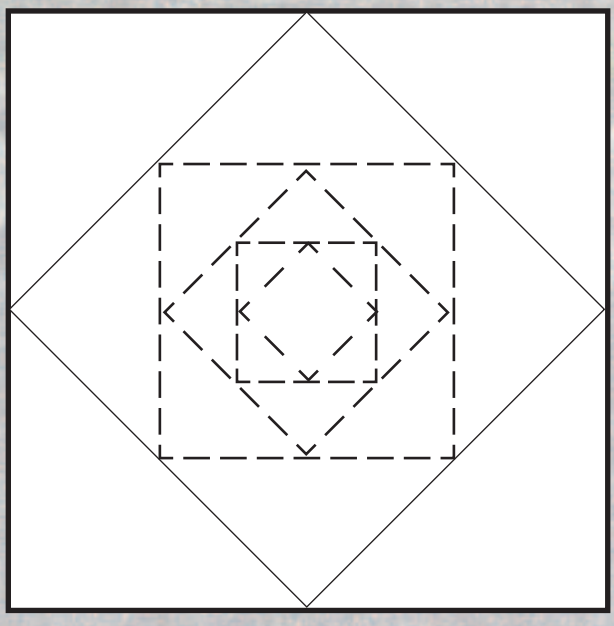
【例一】運算層爲六個新方塊
問題層的數字爲2，5，9，15



【例二】運算層爲九個新方塊
問題層的數字爲8，4，2，15



請驗證一下以上兩個範例的運算層個數，並從奇數和偶數的觀點，來觀察各運算層數字的變化。請自己動手建造一個多層的「數字方塊」問題，並計算運算層新方塊的個數，並觀察各運算層奇數和偶數的數字的變化。



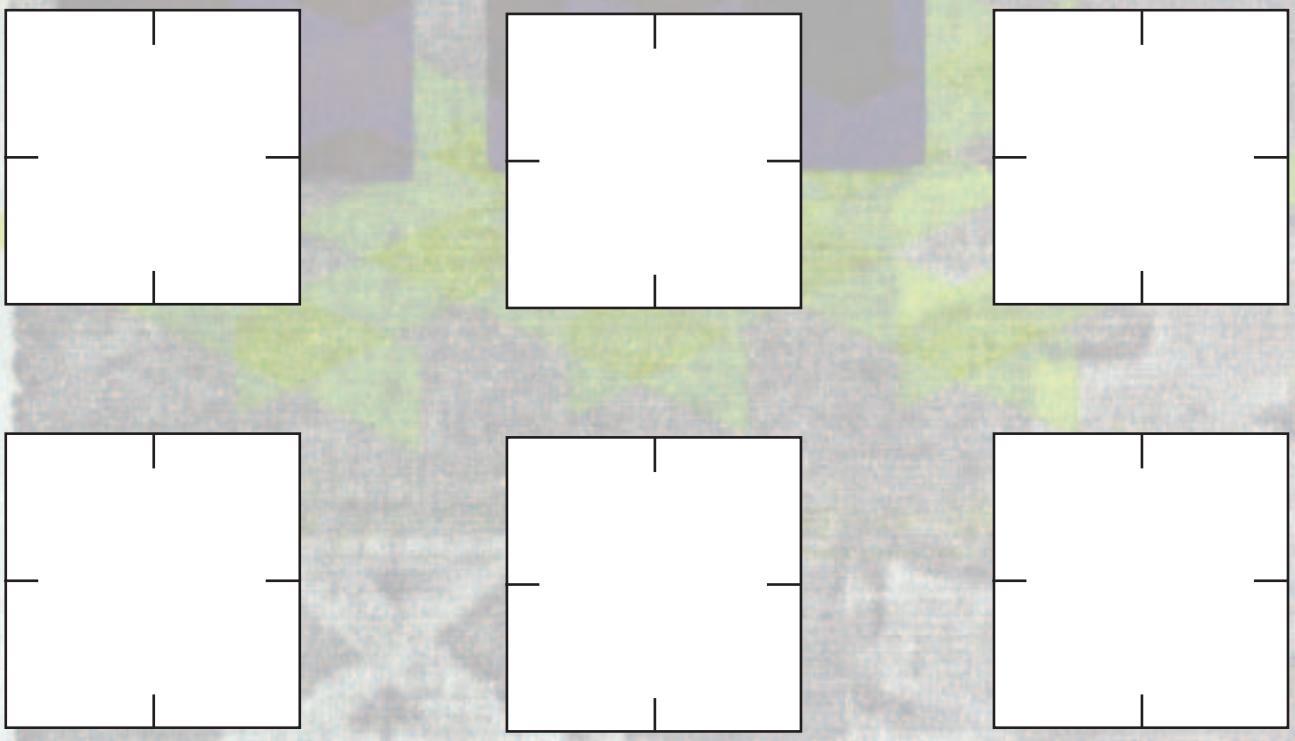
若從奇數和偶數的觀點，來觀察數字方塊問題各運算層數字的奇偶變化。它必遵守下列順序。你同意嗎？三奇一偶或三偶一奇 → 奇奇偶偶 → 奇偶奇偶 → 四奇數 → 四偶數 → 四偶數.....

肆 「數字方塊」問題層中的四個數字

用不同的安排方式把 1 ， 2 ， 4 ， 8 寫在「數字方塊」問題層中的四個角。各數字方塊問題，運算層的方塊個數會相同嗎？請你算一算並畫一畫，看看哪一種安排方式，運算層的方塊個數會最多？哪一種安排方式，運算層的方塊個數會最少？

一、

將 1 ， 2 ， 4 ， 8 寫在「數字方塊」問題層中的四個角。共有 24 種不同的安排方式，請動手寫寫看！



二、

將 1 ， 2 ， 4 ， 8 寫在「數字方塊」問題層中的四個角。共有 24 種不同的安排方式，若把這 24 種不同的安排方式的「數字方塊」問題逐一計算，從運算層的個數又可分成三個類型，請動手寫寫看！ 1 ， 2 ， 4 ， 8 要如何安排？運算層的方塊數才會是六個。哪一種安排方式，運算層的方塊數爲五個。哪一種安排方式，運算層的方塊數最少，它只會有三個。

伍 「數字方塊」問題的規劃、組織與實踐

一、「數字方塊」問題的運算方法，除了可以被用在正方形上，還可以被運用在其他的正多邊形上嗎？它可以被運用在正八邊形上，你相信嗎？動手做做看！

二、「數字方塊」的問題在運算結束的前一個方塊，四個頂點上的數字會有什麼特徵？

三、把差相等的四個不相同的數，由小到大用順時鐘的方向排在「數字方塊」的四個頂點上，運算層的個數會一樣嗎？

例如：【1、2、3、4】；【12、13、14、15】；都是加1的數。

例如：【1、3、5、7】；【9、11、13、15】；都是加2的數。

四、把具倍數關係的四個不相同的數，由小到大用順時鐘的方向排在「數字方塊」的四個頂點上，運算層的個數會一樣嗎？

例如：【1、2、4、8】；【2、4、8、16】；都是乘2的數。

例如：【1、3、9、27】；【3、9、27、81】；都是乘3的數。

例如：【1、4、16、64】；【4、16、64、256】；都是乘4的數。

五、如何建造一個多層的「數字方塊」問題？由四個頂點都相同的四個奇數或四個偶數往外重建運算層，應把握哪些原則才可以建造一個多層的「數字方塊」問題。

六、一個多層的「數字方塊」問題，當問題層的數字各減去一個相同的數字，運算層的個數會改變嗎？

七、一個多層的「數字方塊」問題，當問題層的數字各乘以一個相同的數字，運算層的個數會改變嗎？

八、「數字方塊」問題，當運算層的數字出現相同數時，會有幾種不同的型態，各種型態的運算層個數會有幾種不同的變化？