動動腦玩數學

九宮陣法巧布局

黃敏晃／台大數學系退休
戴寶蓮／北市民生國小退休

1.武功陣法

河南嵩山少林寺號稱中國武功的聖地，寺裡的僧眾在念(佛)經，修心養性之外，也修練武功，健體強身。由於寺處山林之中，毋需如市鎮地區之寺廟一般做那麼多隨緣法事，僧眾較能專注投入研討，因而他們在佛學和武功上都有過人的成就。

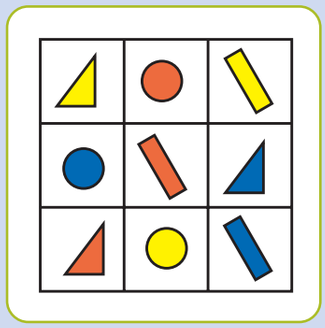
少林武功雖然以個人的十八般武藝爲主，也重視團隊的陣法。因爲河南位於中原，向來是兵家必爭之地，戰事頻仍。少林寺雖地處偏遠山區，仍免不了受波及致敗將殘兵，散卒游勇入侵，傷害僧人和入禪寺避難的民眾。

在人數眾多的戰爭場面中，單打獨鬥勢必威力大減，於是，少林僧人布陣防禦，發展出有名的十八銅人陣。十八個人擠在一起，若沒有事先演練好的補位走步功夫的話，一旦陣式發動，定會眾人擠成一團，自亂陣腳，不等敵手進攻，就已陣仗潰敗了。

因此，任挑的十八位少林僧人需能布好一個十八銅人陣，每人不但要會好幾套武術，還得練好腳步移位的功夫。但是小和尚並不是一開始即練複雜的陣法，而是先從較簡單的陣法練起，諸如兩儀陣（2人）、三才陣（3人）、四象陣（4人）、五行陣（5人）、六合陣（6人）、七星陣（7人）、八卦陣（8人）、九宮陣（9人）等。尤其九宮陣是十八銅人陣的基礎，後者是由兩個九宮陣變化組合而成的。

本文要討論的主題，就是九宮陣法：

布九宮陣的九位僧兵分別拿三種不同的武器—盾牌(下文將以圓形〝○〞表示）；單刀（以三角形⊿表示）、齊眉棍（以長方形▯表示）。每種武器各由3人持有，但這三人穿著三種不同顏色的衣服—紅、黃、藍。



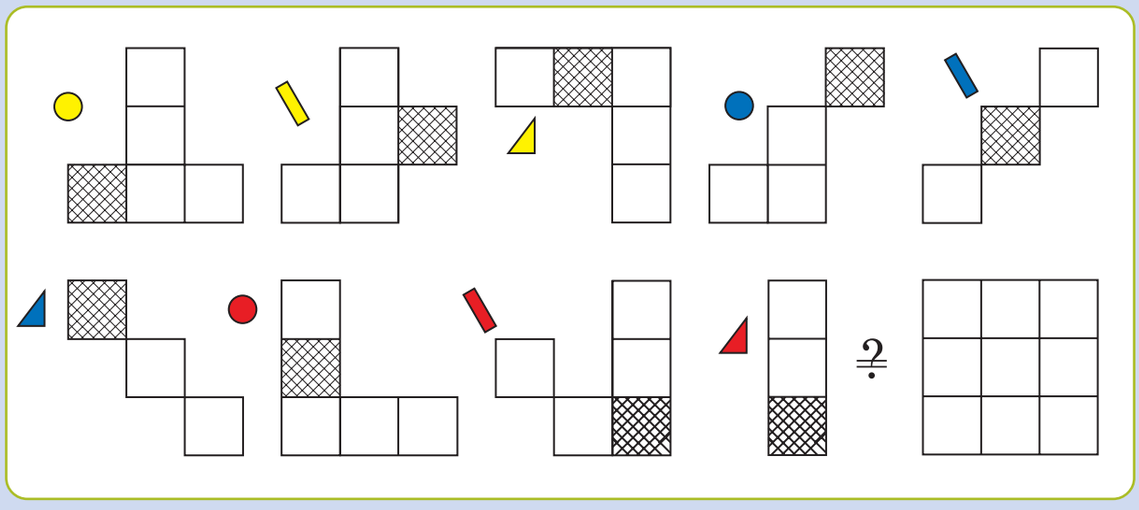
以下文中每道題最後答案的九宮陣，都如同左圖所顯示那樣。在九宮格中，每一格皆有一位僧兵，每位在衣服

顏色或武器形式上皆不相同。

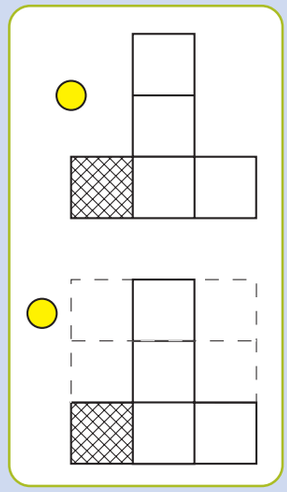
任何體力活動，如球類、跑步等若要成爲頂尖高手，一定也要擁有強健的思維能力，武功陣法，也不例外。因此少林寺在訓練小和尚布陣時，並不直接教，而是用圖式指出拿某種武器穿某種顏色袈裟的人應該站在某個位置。這樣利用圖式的訊息來訓練小和尚的推理思考能力，常此以往能力將大幅提升，小和尚長大之後方能變成明事理，辨是非的高僧。

以下是舉出最簡單的例子說明九宮陣式的布陣法：

例１.



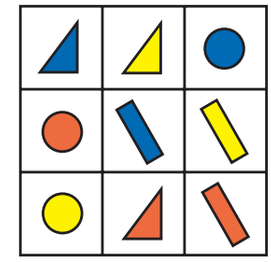
例１中的九個訊息，明白的指出拿那種兵器，穿那種顏色衣服的僧兵，該站在九宮陣的那個位置(網格)，請你依訊息完成布陣。



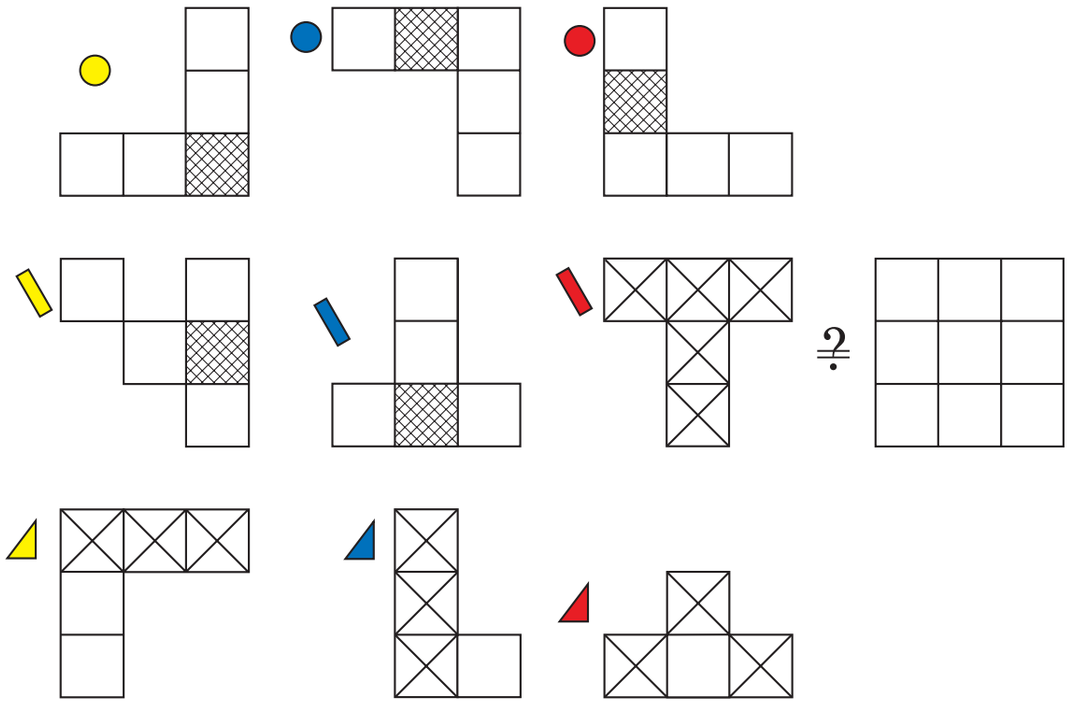
2.布陣指示

爲什麼我們會說上例中各僧兵該站的位置非常明確呢？以上例中第一則訊息(右上圖)來說，看到此圖時，讀者都會自動地在用腦袋裡補劃虛線而成。由此看來，除第九則訊息(下排最右)不明確(該僧兵的位置有三種可能，

即九宮陣中下排的任一個格子）外，其他訊息都是明確的。◢的位置雖不明確，但當其他8人都站定後，此僧兵的位置，也沒有選擇了。此題的解答，讀者應該不難自行作出，如右圖的樣子。往下的例子題目難度會越來越高。



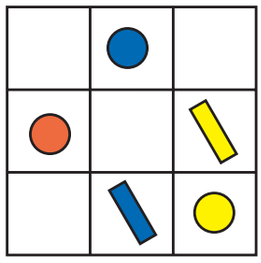
例 2.



例2這題的訊息指示有明確和不明確的；明確的訊息指示在往後的題目中會越來越少，而不明確的訊息指示則會增多。不明確的訊息中，有些是用如 ☒ 打×的方式表示〝不能站在這裡〞的禁制型訊息。

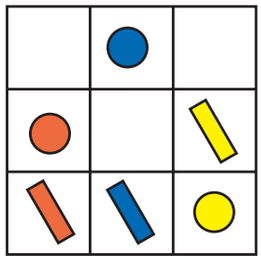
上面例 2 中明確的訊息只有 5 個，依序是上排 3 個以及中排左邊和中間的 2 個。中排右邊是位置明確禁制，下排的 3 個則是位置不明確的禁制。親愛的讀者，請先想一想，再依指示訊息完成最右邊的九宮陣。

要布例2這個九宮陣，一定要先把確定的訊息搞定，然後再考慮比較模糊的訊息。



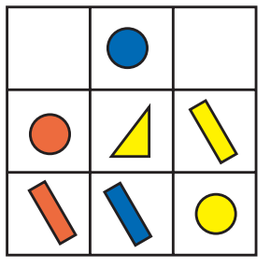
第一波

第一波：例 2 的前五個訊息是第一波要先固定的。



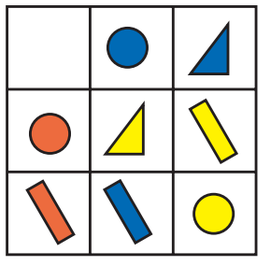
第二波

第二波：繼第一波之後，例 2 題目中排最右邊的訊息就可以用了，因爲把禁制的格位刪除後，只剩左下方的那一格位置。

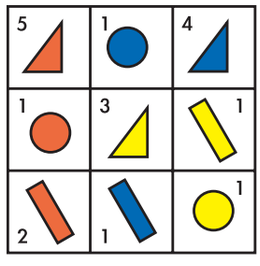


第三波

第三波：其後，最下排左邊的訊息指示，除掉禁制格位，只剩中排中間那個位置。



第四波

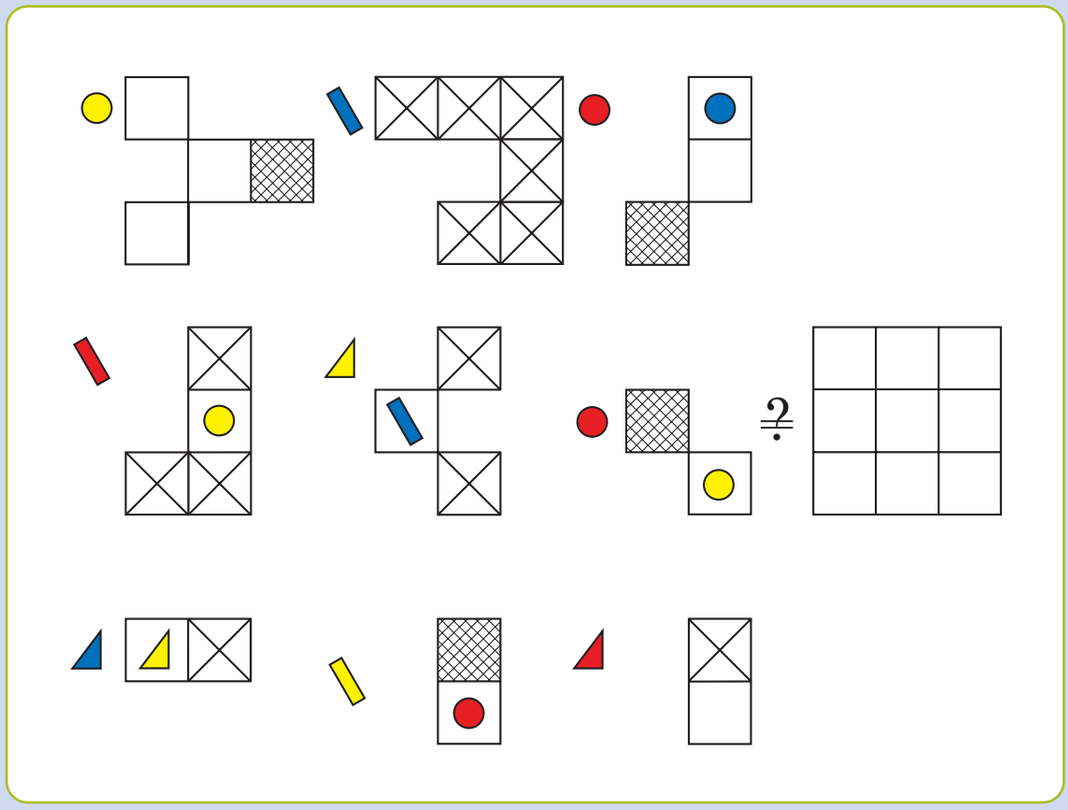


第五波(答案)

依續，例 2 題目指示接著要確定最下排中間及右邊的訊息逐步完成第四波、第五波得到最後的答案。

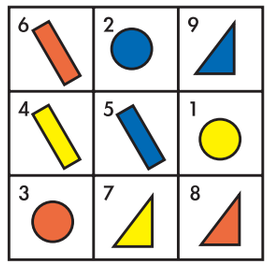
在最後的完整答案圖中，格中所加數字號碼是用來表示第幾波確定訊息的順位。往後的各例題中，題目所提示的訊息之排列會越來越隨機，所以布陣者一定要將訊息運用的先後順序確定，才能順利解題。

例 3.



例3此題與例1、例2在格式上稍有不同，除了確定的位置指示(網格 ▩)和禁止指示（ ☒ ）之外，增加了兩位僧兵的相對位置關係，即訊息格子內都有明確僧兵的身影。這樣子的指示清楚地顯示了訊息的優先順序(Priority)之重要性，亦即一定要先確定第一波的訊息後，第二波的訊息才能產生作用。

請先依指示訊息解題，完成例3的布陣，再往下閱讀吧！例3的題目顯然比例1、例2要難些了。不管如何，讀者一定要自行努力嘗試後，才能對答案。希望你的答案如左下圖那樣。格子中有訊息的波號，照這些數字碼的順序，逐步布陣，方得解答。你使用的訊息時順序如下：



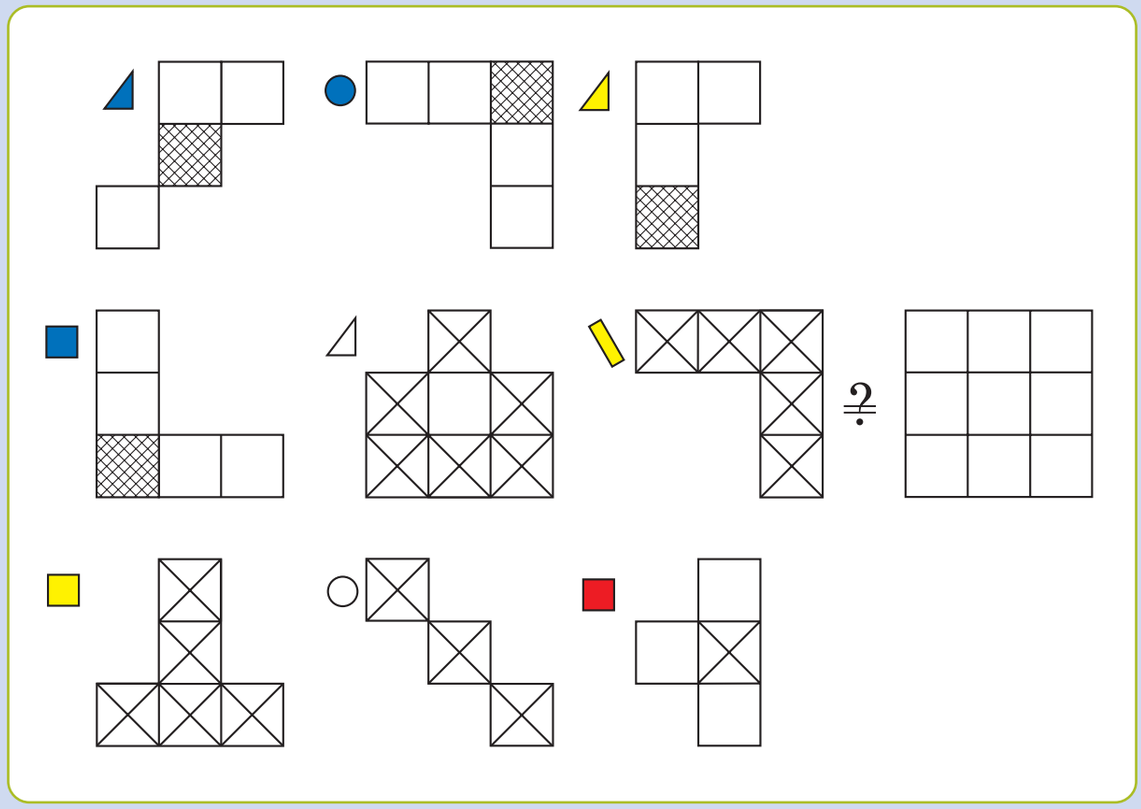
第一波：上排左→中排右→上排右→下排中

第二波：上排中→中排左→中排中

第三波：下排右→下排左

3.新舊問題

例 4.

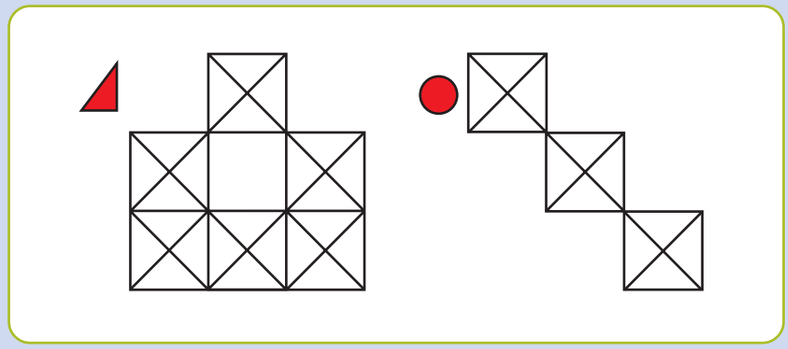


例4的題目中，讀者在任何階段都要選對訊息，才能順利解題。當然題目中的訊息會越來越模糊，不但位置如此，衣服顏色和武器也都一樣。例4有新的符號出現，即中排中的單刀和下排中的盾牌並沒有指明是穿那種顏色袈裟的人，而中排左、下排左和右則是只指定袈裟顏色的僧兵，卻沒指明他們拿的兵器種類，想想看，要怎樣解題呢？你先布完陣式，再往下看吧！

本題（例 4）與之前的幾個例題最大不同之處是有了不確定的人物，或是他拿的兵器未知，或是他的袈裟顏色未知。如此看來，本例題中含有兩種不同的問題，一是人物定性的問題，另一個是這些人的定位問題。後者是舊型的問題，前者則是新型的問題。

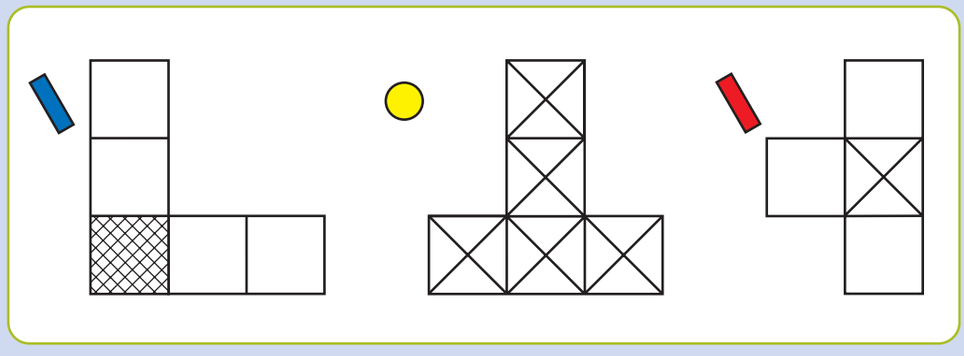
處理新舊混合問題的策略之一，是把新的部分先解決，之後就只要處理老問題了。

1.依例 4 提供的資訊，數顏色就知道，缺了兩位穿紅色的僧兵，故知題目中之中排中拿單刀和下排中拿盾牌的僧兵都應該是穿紅衣服。即可將這兩則訊息改成如下圖所示的明確型式。

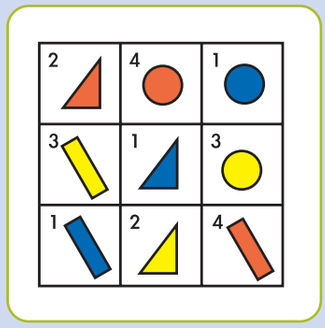


2.至於三位只有指示衣服顏色，而兵器未知的訊息，也不難由點算得知：

中排左→藍衣人拿齊眉棍（單刀和盾牌已出現）
下排左→黃衣人拿盾牌（單刀、齊眉棍已有）
下排右→紅衣人拿齊眉棍（單刀、盾牌已確定）



3.如上把人物定性之後，接著回到老問題（定位）。藉由之前的舊經驗，分波段使用訊息：



第一波：三位藍衣僧兵的位置（訊息上排左、上排中、中排左），剛好由右上到左下

第二波：由中排中，上排右的訊息判知紅衣刀在左上，黃衣刀在中下，別無選擇。

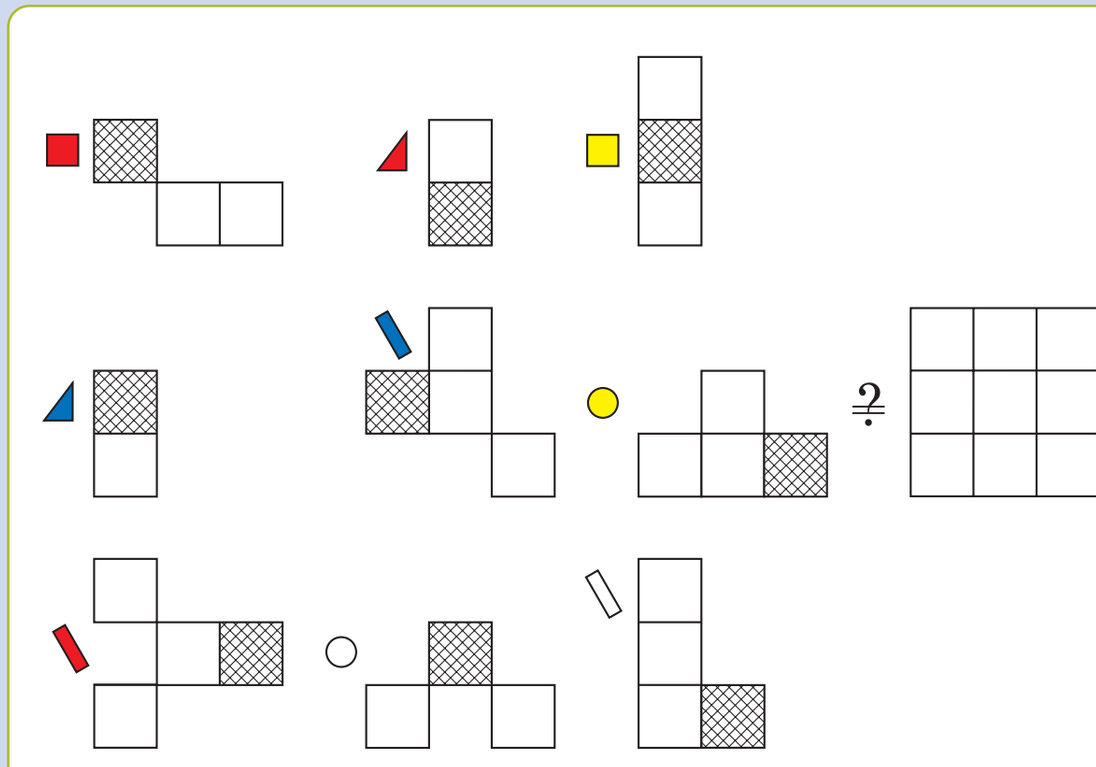
第三波：由中排右和下排左的訊息知道，黃衣棍和黃衣盾的位置，也成唯一選擇中左、中右。

第四波：剩下的紅衣盾不能在左上到右下的斜對角線，只能在中上，而紅衣棍毫無疑問在右下的位置。

4.解題模式

讀者應心裡有數，本文題目難度已經隨著例題編號的數目而增加。下面的例 5 事實上已有些難度，你可先思考再試著解題！

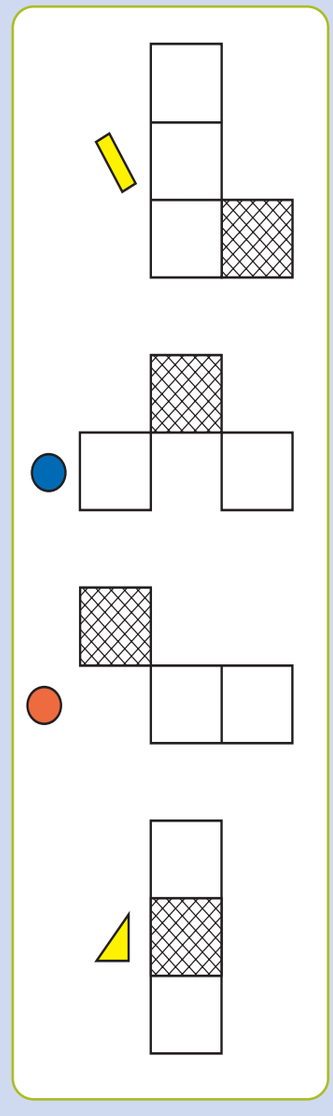
例 5.



相信你已經歷解題嘗試，即使沒成功，也起碼想了超過5分鐘之久。增進數學能力的過程並沒有〝Royal shortcut〞（皇家的捷徑），唯一的方法是每題都花時間想清楚，一段時間後，你會驚訝自己能力的提升。

每人的解題想法並不相同，最好不要一味的模仿別人，嘗試形成自己的解題風格。以本例而言，筆者之一喜歡以位置爲思考的主軸，另一人則喜歡先確定人物的衣色及兵器。下面是後者的想法：

1.藍衣棍（中排中）和紅衣棍（下排左）既已出列，下排右的訊息一定是黃衣棍。

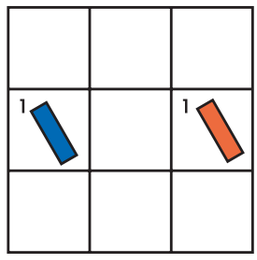


2.計數各色的數目，只藍衣缺１人，故下排中訊息裡的盾兵，一定穿藍衣。

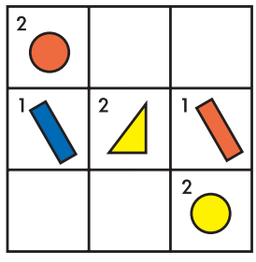
3.紅色棍、刀已出列，故上排左訊息中的紅衣人一定拿盾牌。

4.黃色棍和盾牌已出列，故上排右訊息中的黃衣人一定拿單刀。

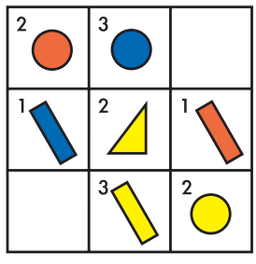
把人物確定後，剩下來的只是位置，現在讓我們回歸到本例之前的有關定位的經驗。把訊息分成幾波，逐波推論。



第一波



第二波



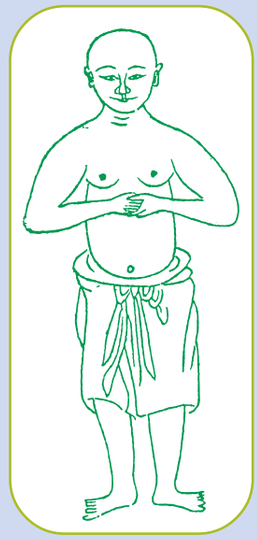
第三波

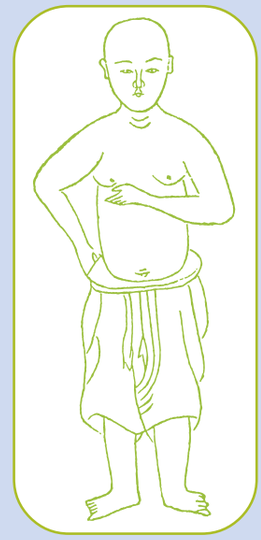
第一波：中排中和下排左的訊息先放入九宮陣中，連同波號也標明（如此，以後較容易複製解題歷程）。

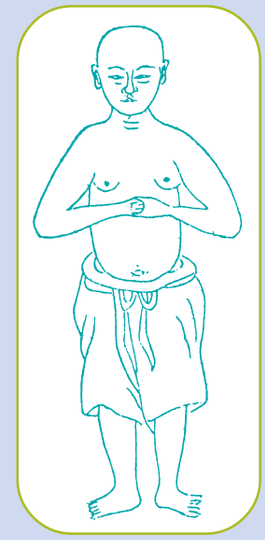
第二波：上排左、上排右和中排右三個訊息，原有幾個可能性，但在第一波之後，都只剩下一個可能，因此可確定放入九宮陣。

第三波：有兩個訊息，即下排中和下排右，它們所指示的位置剩下唯一的選擇，放入如圖所示。

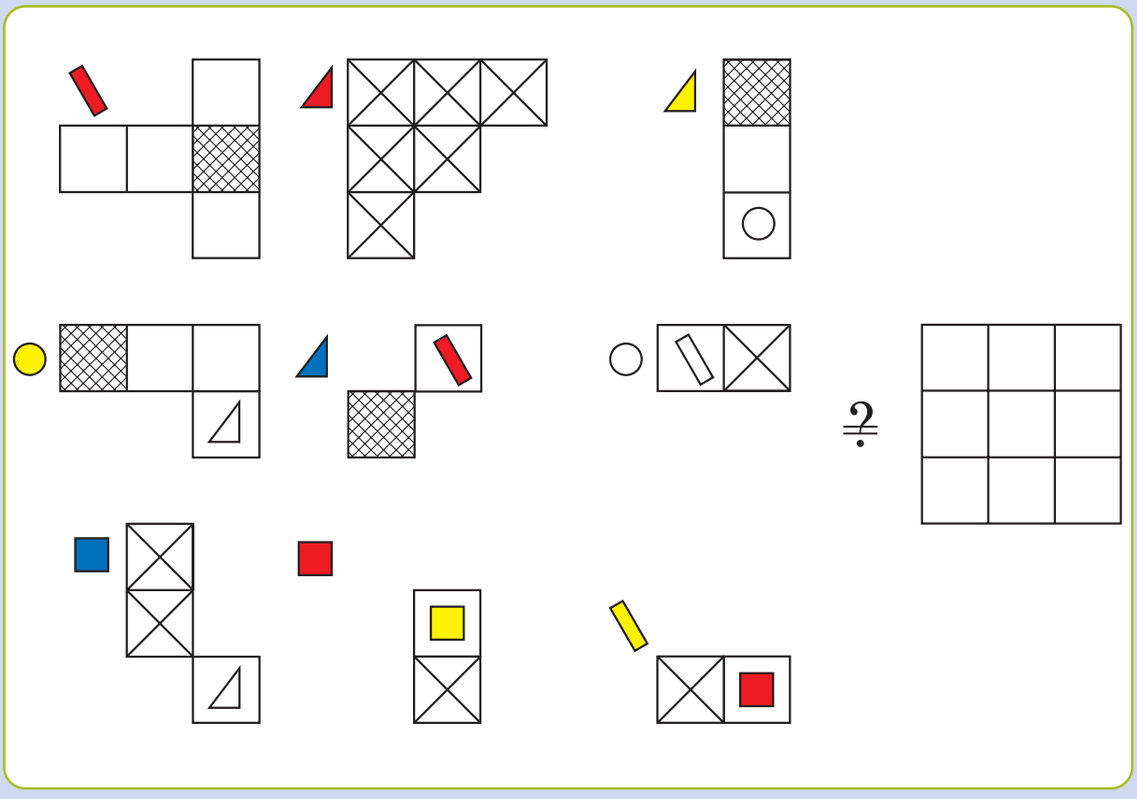
剩下的兩個訊息，讀者可自行解題填入九宮陣完成布陣。







例 6.

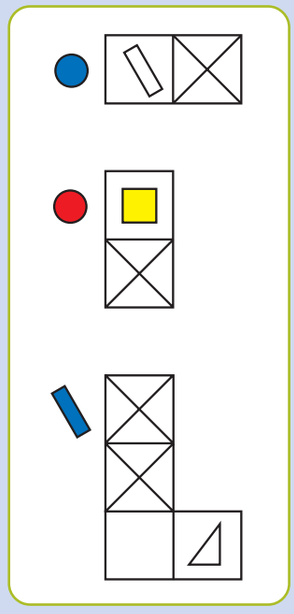


例6又比上例難了些，建議讀者先行解題十分鐘後，再行閱讀。仿前例先將題目中不確定的人物特性定性如下：

1.由顏色點算知道，中排右的○ 盾牌是藍色的，即訊息可改成右圖。

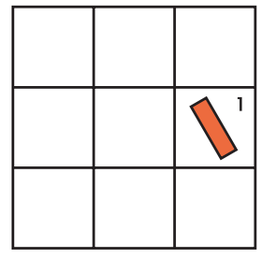
2.紅衣刀和紅衣棍都已出列，故知下排中的紅衣人拿的是盾牌，如右圖。

3.藍衣刀和藍衣盾皆已到列，故知下排左的藍衣人拿的是齊眉棍，如右圖。

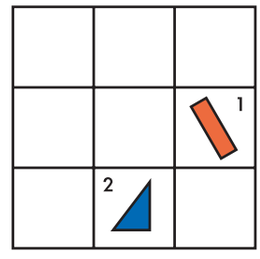


5.邏輯推論

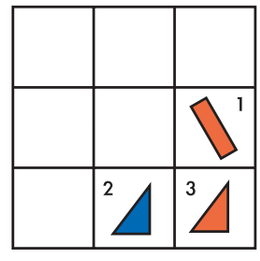
現在題目中的人物都已定性，剩下位置的問題。第1波的訊息只有一個，即上排左提供的紅衣棍的位置。先把此訊息填入此格，如右圖所示。然後再看看題目中所提供的訊息，有那一條可用？你看到了嗎？再仔細檢查！



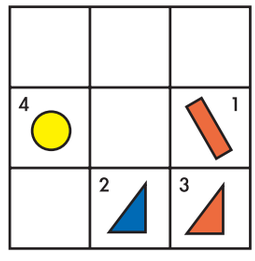
仔細檢查每一則訊息後，終於發現中排中間的訊息已經變成確定的指示：藍衣刀和紅衣棍之間的相對位置關係是固定的，藍衣刀在紅衣棍的左下方。填入此訊息後，九宮陣形成如右的圖示。看著此圖，回頭檢視題目中的訊息，有那個是可用的呢？



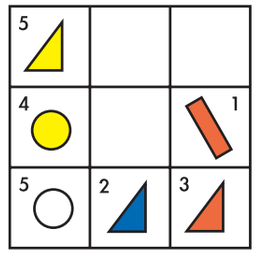
有人說上排中間的紅衣刀應站在九宮陣的右下角，對不對？爲什麼呢？因爲此訊息沒禁制的3個位置中，有2個被佔用了，剩下唯一的選擇。 接下去呢?又可用那個訊息？想想看!



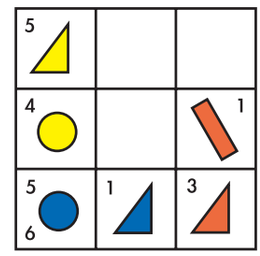
中排左的訊息是目前唯一可確定的訊息，因爲其中◢的位置一定要在右（直）行的中或下格，中格已有紅衣棍，不合，下格剛好是紅衣刀，故黃衣盾牌的位置就是中排左，如右圖所示。



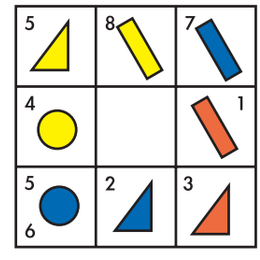
由兩位筆者在台北市的某個實驗場所拿這些教材對高年級小學生實驗的經驗，此題的下一個訊息是很難找到的，5個班各30位左右的學生，只有3個班各有一位指出，上排右的訊息此時已然可用：黃衣刀所站位置在九宮陣的上排，他所在那行的下排是位拿盾的人，但下排的中間和右邊已有兩把刀，故這位拿盾牌的人一定在下排左的位置，黃衣刀也確定在上排左的位置，如右圖所示。



九宮陣左下拿盾牌的僧兵到底穿那色袈裟呢？題目所提供的訊息說，他不可以穿紅衣，黃衣盾已出現，故他是藍衣盾，如右圖所示。此時，只剩下藍衣棍 ▮ ，紅衣盾 ● 和黃衣棍 ▮ 還未定位，他們到底各該佔據那個位置呢？



到此，全班也都又可以參與了：由題目中左下方的訊息知道，藍衣棍不能在中（直）行的上、中兩個位置（紅衣刀在九宮陣的右下方），故只能在右上方的位置。又由題目中右下方的訊息知道，黃衣棍的右邊不能是紅衣人，故他只能在九宮陣的上排中間的位置，如右圖所示。剩下來的紅衣盾牌，只能在九宮陣的中央位置。



本例解到這裡應該已經完成，但在筆者進行實驗教學的班級，每班都有同學提出異議說：「老師，有一個訊息完全沒用到！」他們指的就是位於題目中排右的○▯╳，筆者當然開放全班討論，希望借機提升學生的推理能力。

讀者不難想像，課室裡的同學立刻分成兩派，進行大辯論。一派說，不需要用到的訊息，不會出現在題目中，既然出現一定是有必要的；我們解題時沒用到，表示還沒解完，或答案有錯。

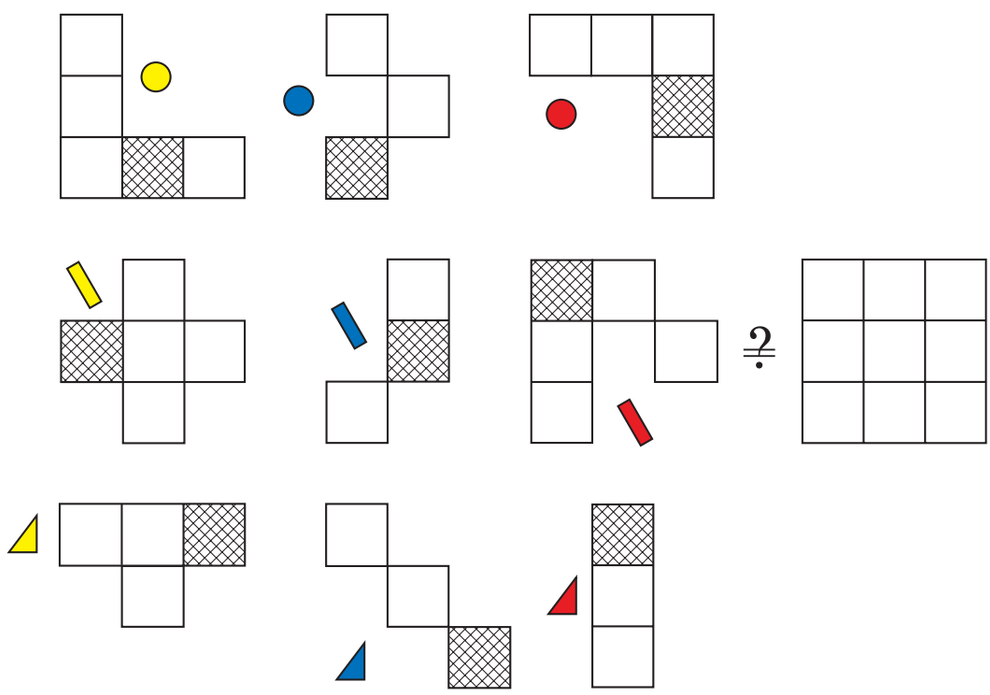
另一派說，這道題目的要求是把三兵三色共九個僧兵，按題目提供的訊息布到一個九宮陣內去。現在我們已經完成了這個任務了，表示解題成功。爲了布一個九宮陣，九個僧兵通常需要九個訊息（一個訊息指示一人的位置），但是，當其中的八人已經定位後，九宮陣中就只剩最後一個位子給第九人。換句話說，關於第九人位置的訊息，本來就是不需要的，若出現，我們也只做最後的檢驗：一般是看看合不合，第 6 例的情形，則只看有沒有矛盾，如此而已。

親愛的讀者，你認爲那派有道理呢？

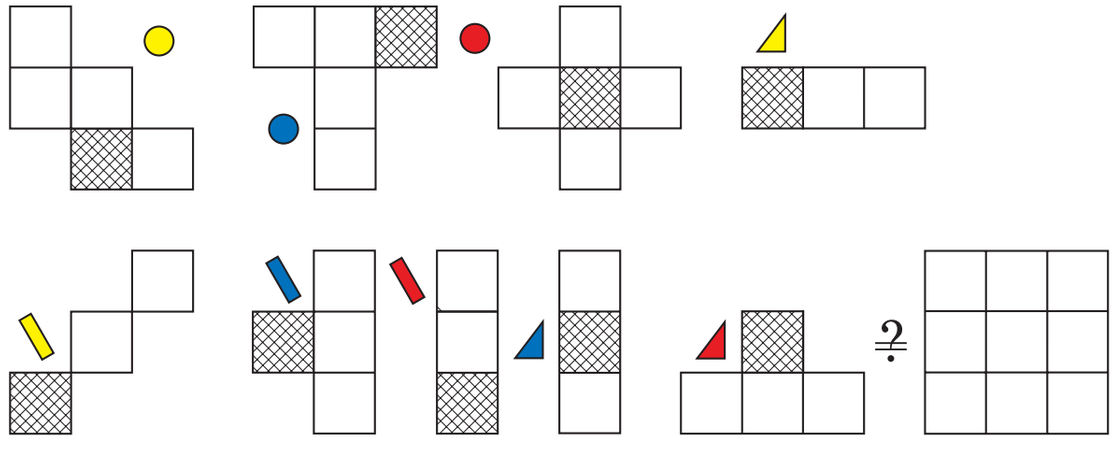
6.自我挑戰

讀者現在已經清楚，本文的題目旨在訓練學生的邏輯推理能力，而這種歷程最重要的是學生自己的投入。完全聽或看別人推論，是無法提升自己的推理能力的。所以下面我們出了一些題目，讓讀者練習。當然，題目由比較容易漸漸會越來越難，過程勝於結果，故不附答案。希望提升自己推理能力的讀者，自己動手解題布陣。

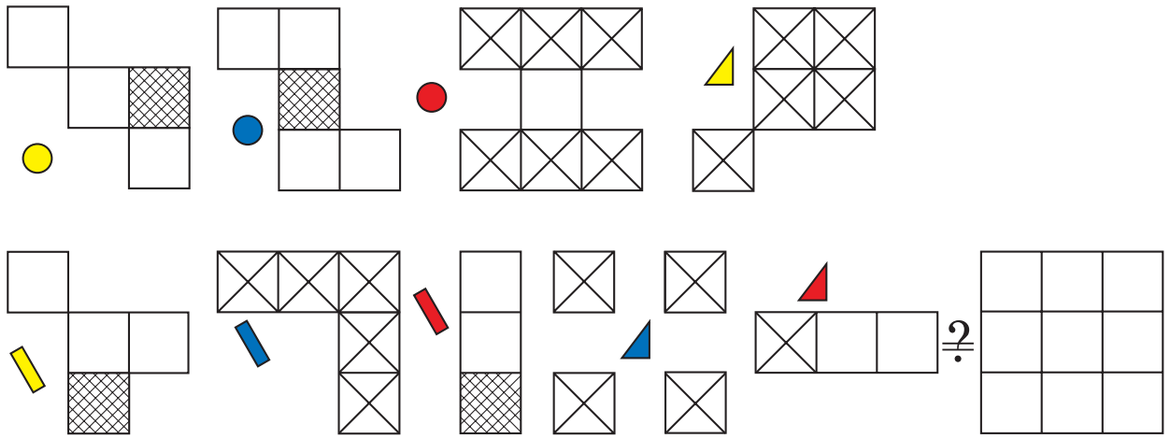
習題 1



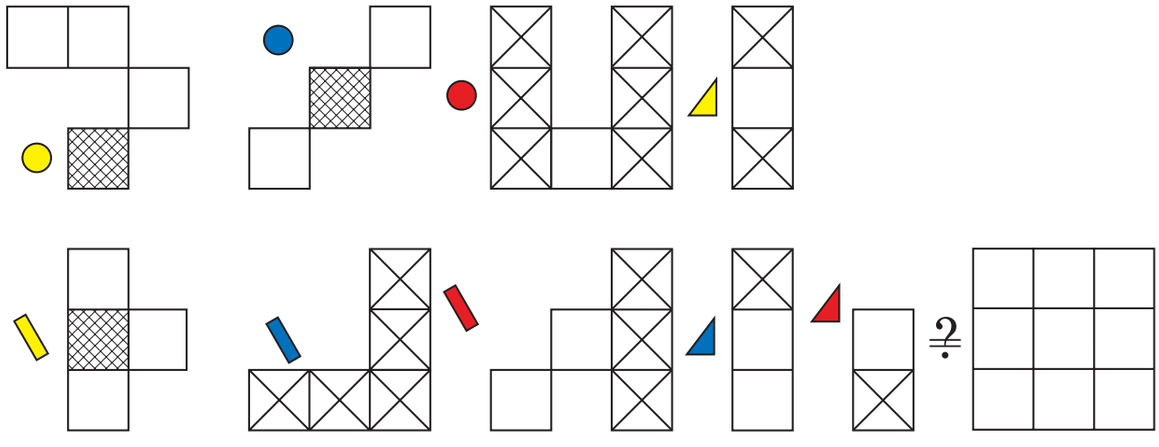
習題 2

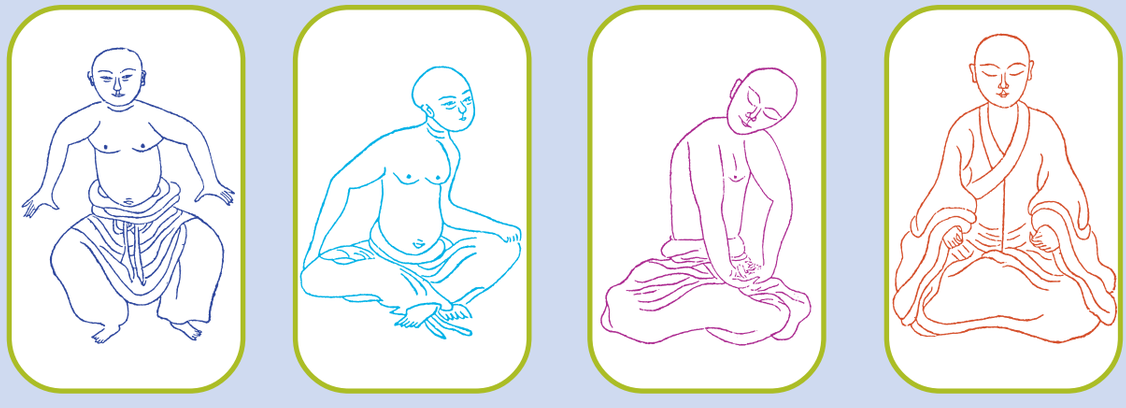


習題 3

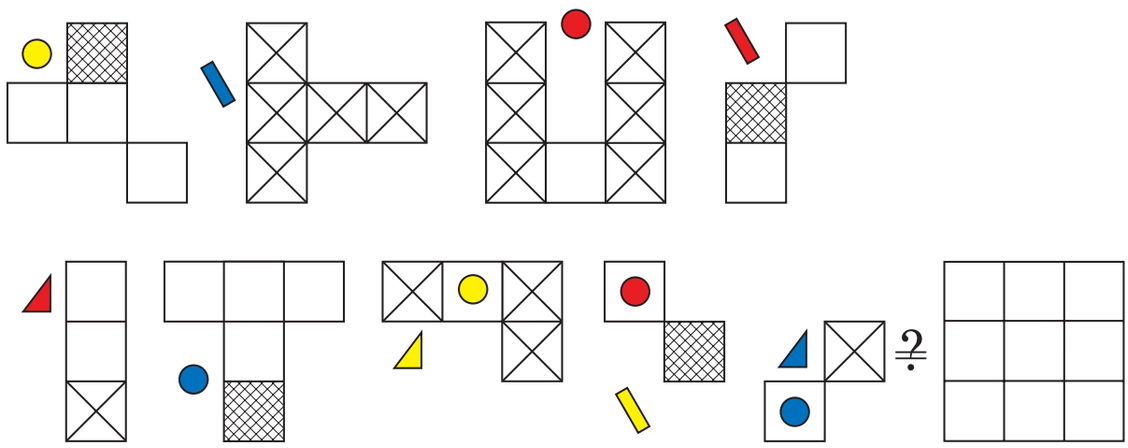


習題 4

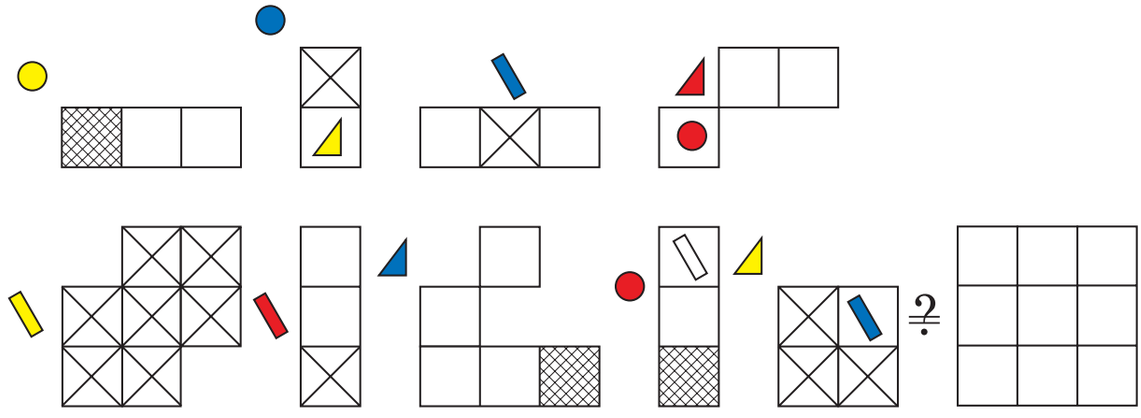


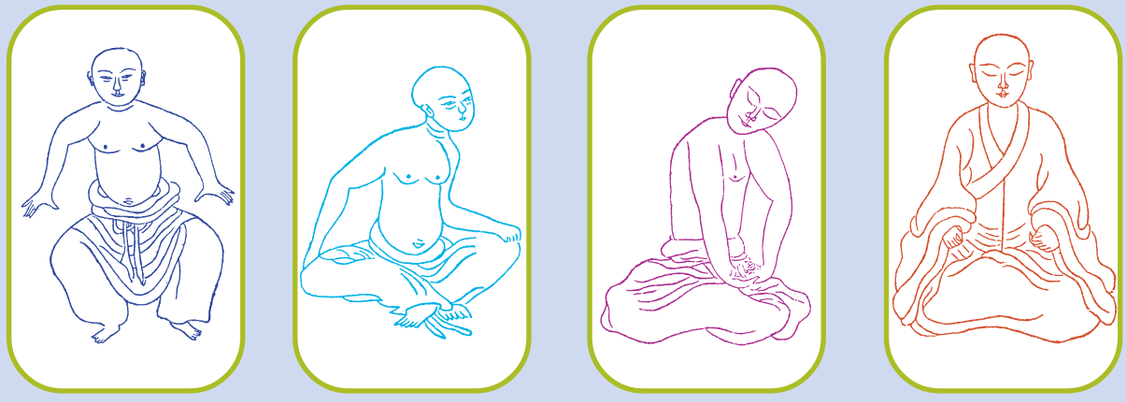


習題 5

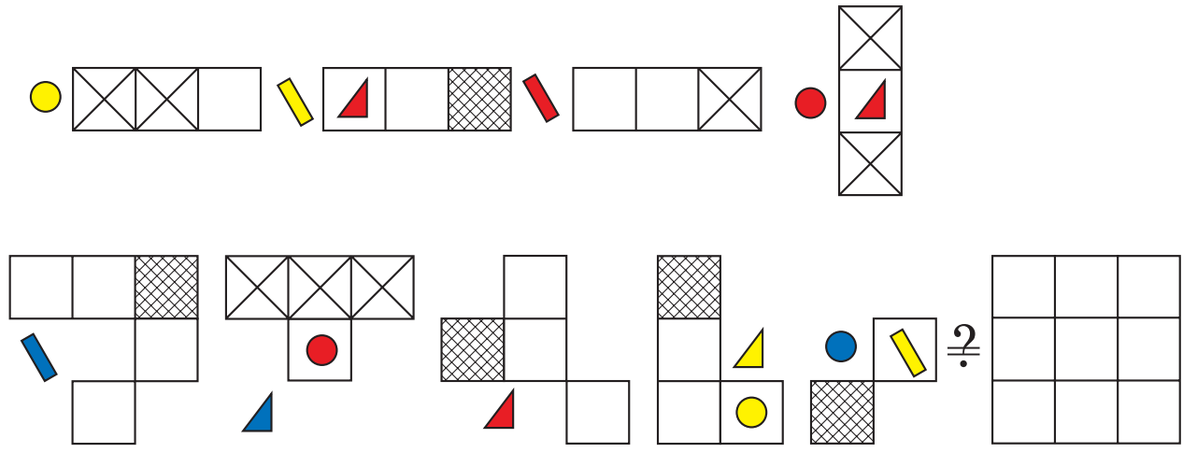


習題 6

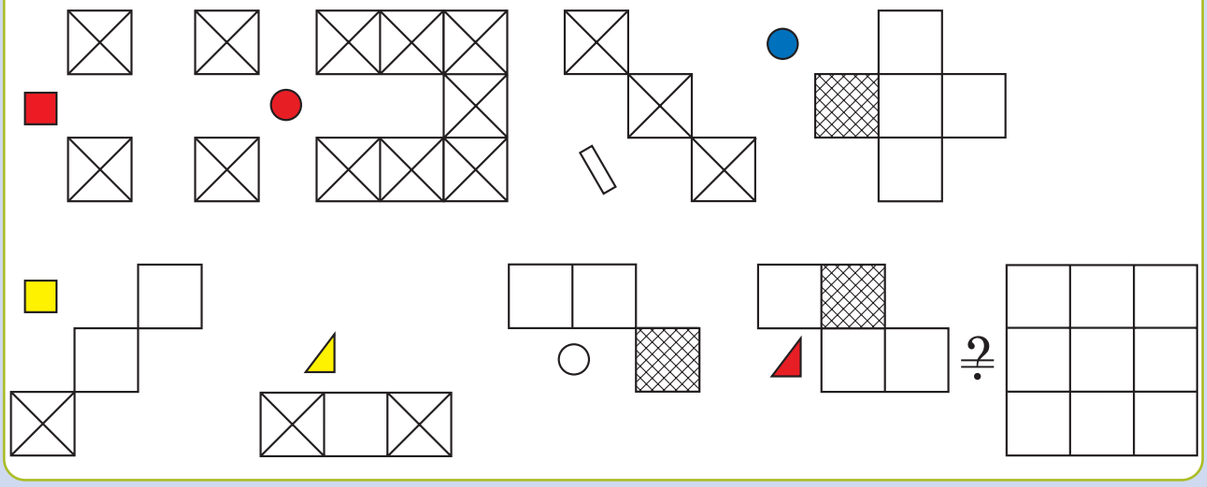


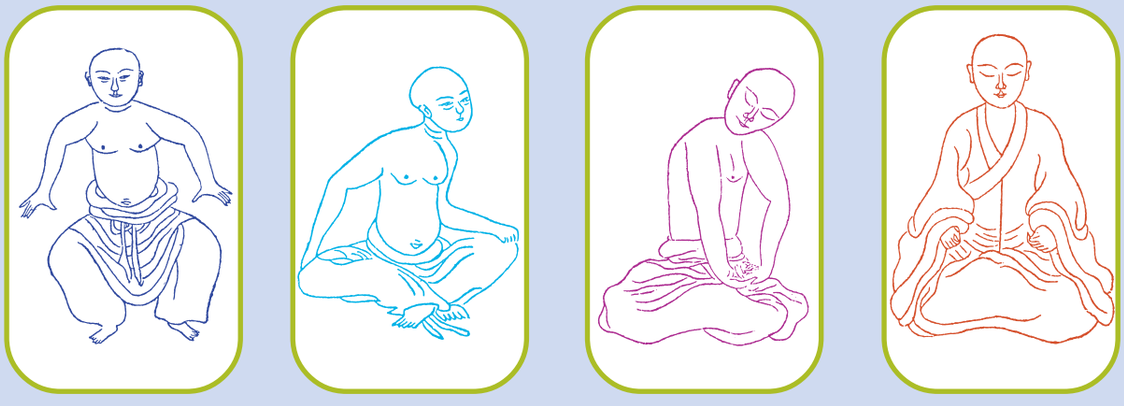


習題 7

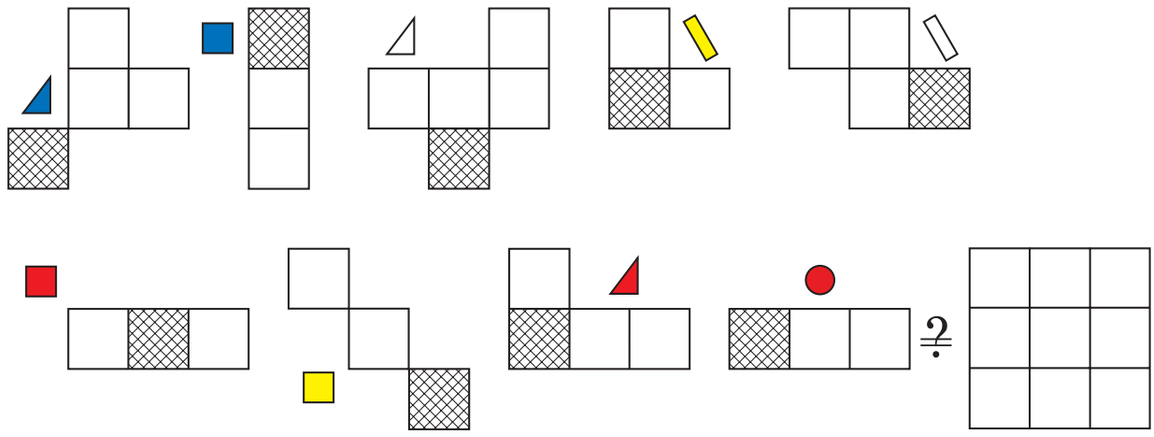


習題 8

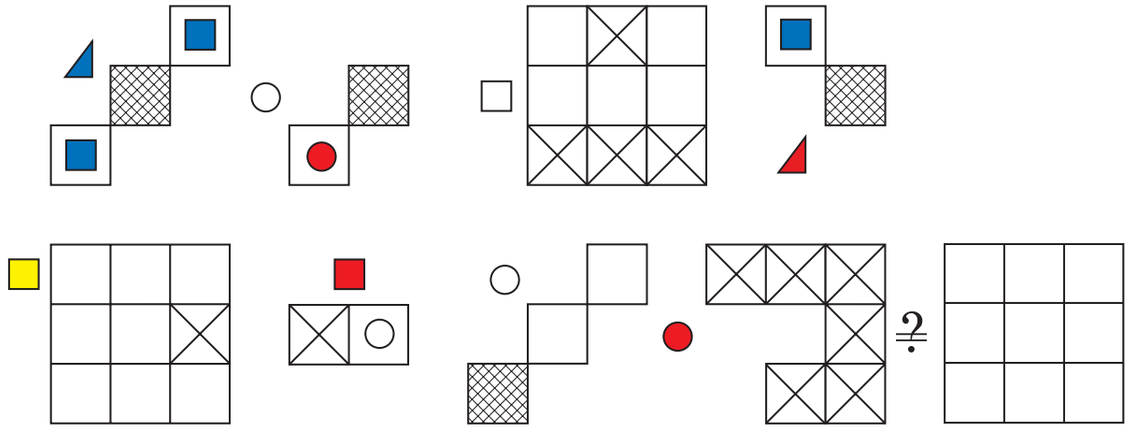




習題 9



習題 10



附註：本文部分材料改編自九章出版社出版的 LOGI X ,邏輯智力遊戲。希望看到更多更難題目的讀者，請從上述的出版中尋找。