十月專輯

制式課程外的另類數學活動

文／黃敏晃　臺大數學系退休教授
呂玉英　臺北市芝山國小退休教師
許文化　臺北市石碑國小退休教師

【前言】

從小學高年級往上，數學是中小學各年級眾多學科中最被厭惡的科目之一。原因有點複雜，本文的目的不在分析此現象產生的原因，而想和讀者分享我們在臺灣看到的一些有趣的數學活動。所謂有趣，並非從筆者的角度，而是從學生的觀點——我們看到他們參與這些活動時，眞是興高采烈，而且積極主動。

我們認爲學習任何事物，舉凡科學、文學、音樂、藝術，甚至體育運動如球類等，若沒有這種態度，實在很難學到手，數學當然不例外。

爲什麼參與這些數學活動的學生會如此喜歡？這點等到本文的最後面，再來檢討吧！下面，就請先看各種活動的簡介。

【一、數學燈謎】

這本雜誌本期的另一篇數學文章「數學與生活語言的另類連接」，介紹的

就是數學燈謎的活動。讀者若能停下這裡的閱讀，先去讀下篇文章，也許對本文討論的事物，會有更強烈的感覺。

數學燈謎和我們熟悉的，通常於元宵節在廟宇打(或射)的燈謎並沒兩樣。不過，既然掛上「數學」做爲形容詞，其謎面或是謎底就得與數學物件掛鉤，譬如說，謎面是「員，打一數學名詞」，其謎底是「圓心」；又如謎面是不等式「2≦X≦3，打一句我國的四字成語」，其謎底是「接二連三」。

數學物件與數學之外的事物的連接，是數學學習的重要部分，至少可以說與數學對外界的應用是相關的，故可以補充制式數學課程應用案例之不足。但是，數學燈謎中的連接有些另類，比較像是「腦筋急轉彎」的步數。有些數學老師並不欣賞。

但是，這種需要打破既定的思考框架，才能解題成功的活動，也許是許多學生喜歡參與的原因之一。而且解題成功頗有創意的味道，令學生感到格外興奮。另外，猜對燈謎通常都有獎賞，雖不很貴重，也値得紀念。

由於中、小學每學年的第二學期開學日，總在元宵節前後不久，故許多中、小學於開學日或第一個學校日（家長到學校），舉辦數學燈謎的活動，一方面熱鬧一下，另方面也可達到讓學生收心的效果。

【二、數學步道】

1991年，本文的第一位筆者夥同朱建正、林福來兩位教授一起到加拿大的魁北克市，參加四年一次的國際數學教育大會（International Congress of Mathematics Education)時，看到一位來自澳洲的數學教育工作者，利用該市碼頭地區的硬體設施，設計了一系列的數學問題（每道問題都針對某一個特定的硬體），而這些問題串成了一條動線明確的步道。

當你走過這條步道，解答了問題之後，你對該地區的狀況，會有進一步的瞭解。故這樣的功能，最適合國中、高中和大學的新生訓練（小一生當然不行)；步道手冊(毋需豪華，自己手繪、打字，影印裝訂成A5大小的幾頁小冊子即可）通常附有該地簡圖，指出各問題所在地。

回到臺灣後，我們努力推廣，先後推出了「臺大椰林大道數學步道」、「台北火車站數學步道」、「中正紀念堂數學步道」等，也幫忙許多中、小學設置了該校的「校園數學步道」，例如台北市東

園國小、民生國小、立農國小、天母國中、建國高中、新雅國中，基隆市武崙國小等，都有自己的校園數學步道。

事實上，每所學校因其地理環境之不同，故其數學步道各有特色，有些題目是其他學校無法出現的。譬如說，天母國中的校園數學步道中有一道題目如下：

> 操場的跑道是全校最低的地方，找出全校最高的樓層地板，並且量量看，它比操場跑道高出多少公尺？請說明你是如何測量的。

這道題目看起來沒什麼稀奇之處，好像別的學校之校園數學步道也可以出類似的題目，但他們學生的解題內容跟天母國中的學生就天差地遠了。因為當一所學校蓋在一個水平的地面上時，操場的跑道固然是全校最低的地面，每棟樓層的基底也在同一水平面上，故選定最高的樓層地板後，它高出操場跑道的距離，變成簡單無趣的乘法計算，有兩種方式如下：

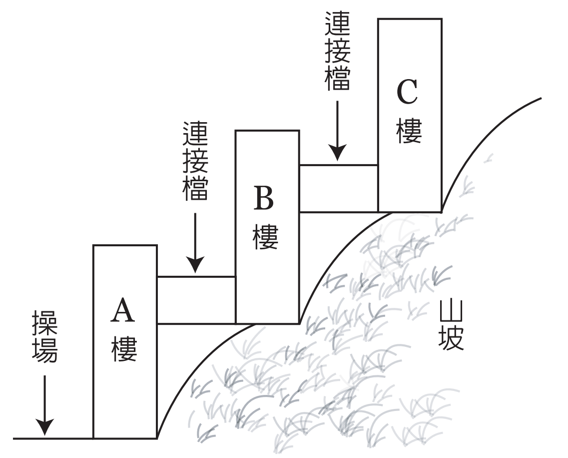
(1)每階樓梯高度×樓層數

(2)每層樓高度×樓層數

每層樓高度＝每階樓梯高度×一層樓數

上述兩種算法都假設，同一棟樓房的各階樓梯都等高（根據我們在幾間學校的抽樣估測，小學的樓梯每階約15公分，中學則約18至20公分）；第二種算法則進一步假設，每層樓一樣高（學生檢驗的方式，常只算每層是否同樣多階梯）。

但是，天母國中是建築在山坡上的，如下圖：



所以學生在計算落差時，需要利用連接橋把幾個不同棟的大樓連在一起才能計算，故使這道題在天母國中產生了特殊的味道。

像這樣的獨特問題，並不是純靠地形。例如台北市的東園國小，進入大門的左側立有一塊石碑，指出該校的建校日期是日治時代「大正」XX年。因此，其校園數學步道有一道題目如下：

本校創設於日治時代大正XX年，請問本校的校齡是多少年？

當然，每所學校都有它的創設年代，可以問其校齡，但東園的學生解本題時比較曲折，不能光就民國幾年到幾年來計算，而需要額外的資訊，即大正某年相當於西元○○年，而民國元年又相當於西元△△年。這種題目需要轉化的情形，其解題情形非常有助於數學的學習，而且，與人文相關的題目，也使數學對外的連接更加豐富、多元化。

因為台灣的學校硬體結構，某種程度很相似，故有些題目是各校共通的，譬如說在每校某建築的殘障斜坡旁，都可提出如下的數學問題：

這條殘障斜坡的斜率，是否合乎政府的規定（≦15°）？
如何測量呢？
本校其他的殘障斜坡的斜率，是否也和這條一樣？有一致性嗎？

有趣的是，有人真的搬來輪椅，讓學生親身體驗殘障朋友把自己推上斜坡的困難與辛苦。其實，不習慣坐輪椅的人手臂力道是比較差的，這項具體考驗對大多數的中、小學生都以失敗收場，但大家都非常高興。這樣的人道關懷則是筆者認為最棒的地方，因為數學並非如名數學家Herman Wyel所說的「數學的美在其冷而酷(sharp and cool)」那樣冷冰冰，也可以是很溫暖的。

法國的名數學教育家Vergnäud曾對數學的概念提出如下的公式：

C=(S,I,R)

其中，C就是概念concept，S是情境situations，I是不變性invariants，R是表徵representations。此公式的意思是說，數學的一個概念會在許多不同的情境中出現，而且在不同情境中出現時的樣子，及解題的方式都很不一樣

的，但它們都有共同的不變性，這種不變性的掌握才是眞正的數學概念。

以上述案例中的斜率來說，除了殘障斜坡的斜度外，樓梯（包含螺旋梯和電影「海角七號」中阿嘉房間的窄梯）的陡度，地下停車場（許多城市的學校操場下面都有）出口的斜坡，橋樑（如大直橋），山坡（我國的建築法令規定，≧30°的山坡不能開發爲建築用地），屋頂（北歐建築的屋頂爲什麼都比較陡？）等都出現了斜率的概念。在上述各情境中，斜率呈現出來的樣子並不盡相同，測量的方式也相異。學生能從不同情境，不同表徵中抽出同樣的數學物件，在在的體驗了數學「抽象」的精神，是數學學習中非常重要的一件事。

另一件可以在數學步道中，學生可以體驗到的是，理論與實際的落差。譬如說，在下面這道數學問題中：

(1)量量看，一部汽車的停車格(通常是個長方形)，長和寬需要多少公尺？面積是多少平方公尺？
(2)量量看，一座籃球場的長方形之長和寬各是多少公尺？其面積是多少平方公尺？
(3)若臨時把一座戶外籃球場當作停車場（心中畫出虛擬的停車格），可停多少部汽車？

(1)和(2)都只是單純的實測（各學校都有停車格和籃球場），和應用長方形面積公式的乘法，但在解決(3)時，學生常將問題自動簡化成除法，例如：若停車格是長3.5公尺、寬2公尺，面積是7平方公尺。而籃球場的面積是a平方公尺，則學生的答案常是a÷7＝b部車；大家都知道，此答案是不對的，因爲我們無法眞的在一座籃球場畫出b個3.5×2的停車格，如果更進一步，把問題特化(specialization）成如下：

(4)設籃球場的周邊並無多餘的空地，故將籃球場權充停車場時，要闢出車輛進出的走道。請問，如何設計才能得到最多的停車格？請證明你的答案是最佳解答。

如此的布題，更能使學生從制式數學課程中，經常將問題理想化(或簡化)處理的夢境，拉回到現實的殘酷塵世。

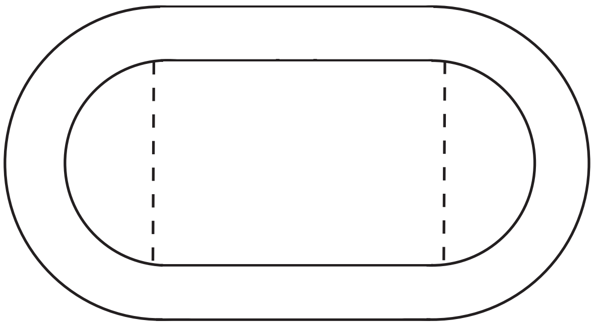
有些讀者會覺得，到目前爲止，數學步道所描述的問題都太過簡單，沒有數學的深度(西方的數學界常用「數學軟飯」soft mathematics來形容)。但是，太有深度的數學問題常把學生嚇跑。台灣學生對數學的厭惡程度，不容許再加駱駝背上的最後一根稻草，故在讓他學習數學在外界環境的應用時，實不宜採用較深的數學問題。雖然如此，數學步道還是有些有點難度的題目，如下：

(1)在400公尺接力賽時，爲什麼在外圈的起跑選手會比在內圈的選手站在更前面？這樣公平嗎？

(2)操場跑道最內圈和最外圈，一整圈各是多少公尺？量量看。爲什麼會有這樣大的差異？

爲了探討這個問題的原因，我們需要研究跑道（見下圖）。

其內圈一般都是由一個長方形在其較短的兩端，拼上像帽子那樣的兩個全等之曲線弧形而成的。

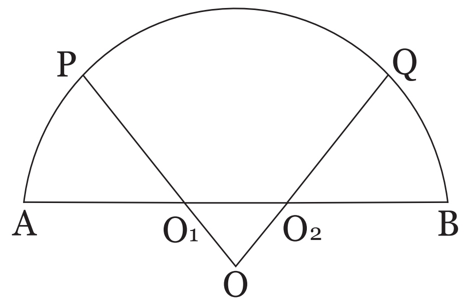


(3)跑道的內圈是一個橢圓形(去掉中間的虛線)嗎？請證明你的答案(此答案是否定的，我們想聽的是學生對它不是橢圓的論證）。

(4)長方形兩端的帽子是全等的嗎？你能加以證明嗎？它是一個半圓嗎？請說明你的答案。

學生對問題(3)的否定論證中，即使是高中生，很少提到橢圓曲線中不含直線段的事實。問題(4)的答案，一般而言是錯的，而證明的要點是用反證法：若它是半圓，則其圓心應在虛線的中點；以此點爲圓心，此點到虛線端點的距離爲半徑，拿長繩子畫圓，很容易看到其軌跡與跑道的曲線不符。那麼，跑道的曲線到底是怎樣的曲線呢？請看下題：

(5)帽子部分是由三段不同的圓弧祖成的，圓心都不一樣，如右圖所示，左右兩邊的圓弧半徑相等，但圓心都在虛線上，中間圓弧的半徑則較長，請找出這三個圓心及半徑長度。



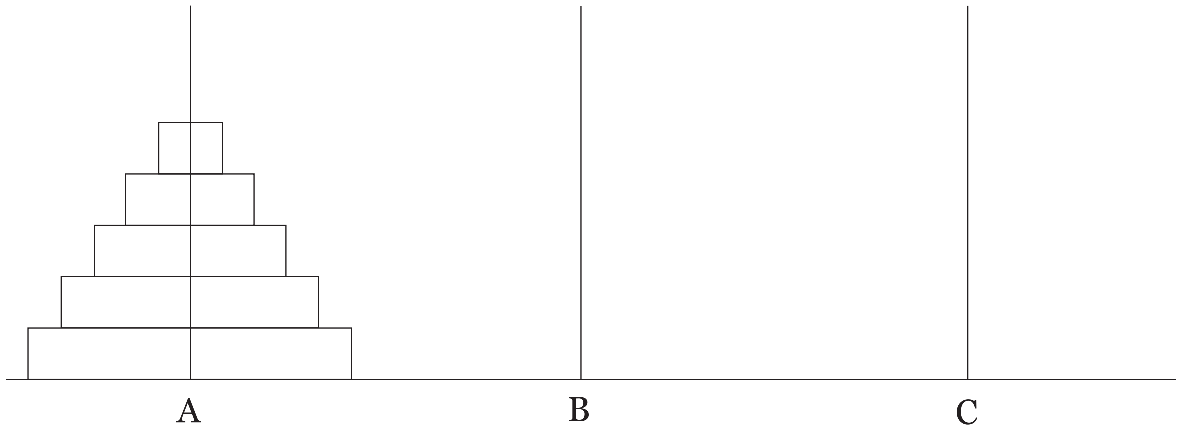
數學步道的最大功能，是師生離開了數學課室、黑板和桌椅等他們平常習慣依賴的工具，剩下的只是腦海中的數學概念及操弄數學物件的形式運思，整個的「教」與「學」的運作都得重新調整，概念是否正確，有否理解，會不會估測變得很重要，解題時和同伴、老師一起討論有無效果，這些變成你的重要工具。這樣的體驗，對學習數學而言，會有新的啓發。

【三、數學遊戲】

當老師覺得制式的數學課太沉悶，許多學生開始打瞌睡的時候，若想重新激起學生對數學的熱情，最有效的一帖藥就是跟他們玩一場數學遊戲，保證他們High翻天。數學遊戲就是跟數學扯得上邊的遊戲，典型的是找出致勝的數學規律，以便贏得勝利。

當然，數學遊戲並不是只提供熱鬧的活動，有時它跟制式數學課程內容有密切的關係，譬如說「稅收遊戲」與質數、因數、倍數的概念有關；「搶30」及其延伸遊戲與倍數、餘數的概念相關；「拈(nim)」與二進位記數系統相關；「河內塔」與數學遞迴模型的建構有關；「(平面及立體的)連塊遊戲」有助於平移、旋轉(平面及立體)、鏡射(平面的點鏡射、線鏡射，立體的點鏡射、線鏡射及面鏡射)等剛體運動(rigid motions)的學習；「人面獅身與自我放大複製」與放大、縮小、相似形的學習相關；利用「百力智慧片」及相關產品進行五種正多面體，各種截角正多面體、足球？等的製作，也非常有助於學生學習立體的形體，培養空間能力，此活動甚至可用來展現滿有數學深度的立體的「對偶」(duality)概念；我們不必再繼續寫下去。不同種類的數學遊戲太多了，有興趣的讀者，可以自己再去找。下面，就以「河內塔」來說明，玩這個數學遊戲時會學到的數學。

如下圖，木板上有A、B、C三根柱子，A柱套有5個大小不等的有洞圓盤，請將這些圓盤移到C柱。
但在過程中的任何狀態，在同根柱子上，較大的盤都不能放在較小盤子上。
請問最少要多少步才能完成任務？



原來的問題中盤子的數目通常是 7 個（有時是 9 個），盤數越多，解答越難。筆者認為，對國中、小學生而言，5 個盤子就已經夠難了。一個人若會解 5 個盤子的河內塔問題，則7個或9個盤子的問題，只在考驗他延伸成果的能力而已。

有些學生考慮太多，腦筋古板不靈通，說沒道具不能玩。你不會隨手拿身邊的代用品嗎？譬如說，1元、5元、10元和50元的銅板，就是四種大小不同的物件了，然後在紙上畫三個大圓圈代替柱子也可以。這樣你就可以玩此遊戲了，請開始玩吧！

第一次玩沒玩過的遊戲，就像做數學中的非例行性問題（non-routine problems）一樣，一定得用嘗試錯誤法（trial and error）。古老的青年十大守則中有一條說：「失敗為成功之母。」講的就是同一件事。嘗試後失敗，反省檢討重新調整再嘗試　這樣的過程中，我們對這個題目，會養出某種感覺，這是對解題非常重要的一件事。

試想，我們若沒有感覺，如何學會游泳或騎單車？學數學其實是一樣的。但是，在制式數學總課堂中，老師卻恨不得每位學生都能立刻學到對每道題目的最有效解法。如此的下場是學生對數學內容毫無感覺，學習只是死記老師教的解法，較好的學生也不過是模仿成功而已。這樣如何培養出學生的數學能力？玩數學遊戲的最大好處就在於，大家毋須太認真講究效率，故學生可以在如此過程，好好歷練數學解題(mathematical problem solving)的完整程序。

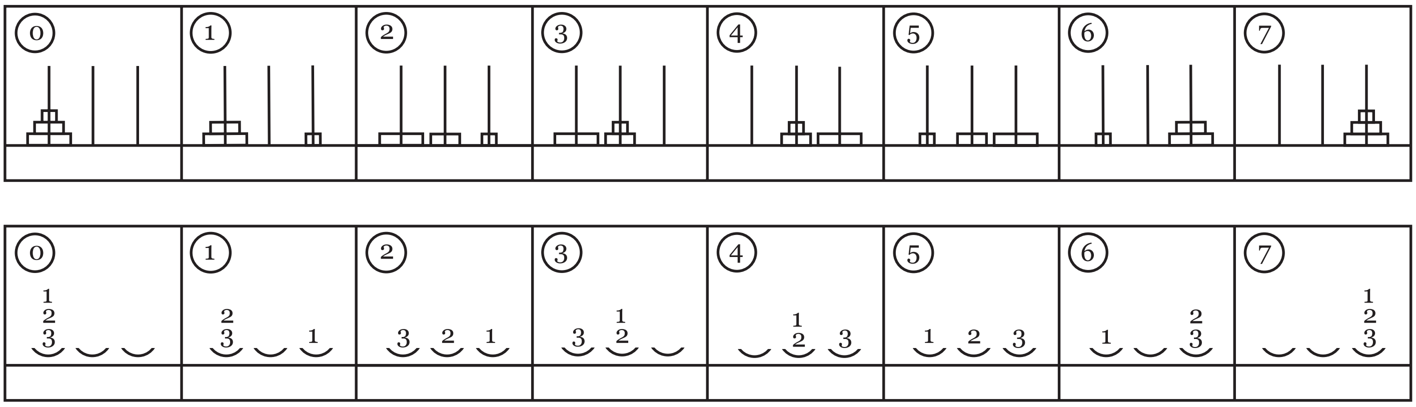
嘗試錯誤的內涵包含改變題目，數學方法論中最常被用到的方法是簡化法，即把題目變簡單，簡單到我們解得動。這道題目的 5 個圓盤，若嫌太多，可以暫時減少到4個，甚至於3 個。以我們的經驗，3個盤子的解題成功率高達 80%，而且大家都同意最少要 7 步才能搬成功。還未開始玩的讀

者，現在請立刻先玩，成功後，再回來閱讀下文。

我們假設，現在正在讀這段文字的讀者，都有成功將大小不同的 3 個盤子從 A 柱（照大盤不壓小盤的規則）搬到 C 柱的經歷。好，你能將這個成功的經驗複製嗎？想想看，怎樣複製？

若你無法複製，別人就有正常理由懷疑你的成功經驗的存在性，故記錄變成很重要的一件事。事實上，若沒有記錄，我們也無從進行反省檢討的工作。現在你已經看到，數學的運作中，爲什麼不能只有具體操作，而要提升到形式運思的道理。想想看，怎樣記錄？

數學裡的有些記錄是單純的將過程中的每一種狀態記下來，例如下面就是二種記錄的方式，你喜歡哪一種？



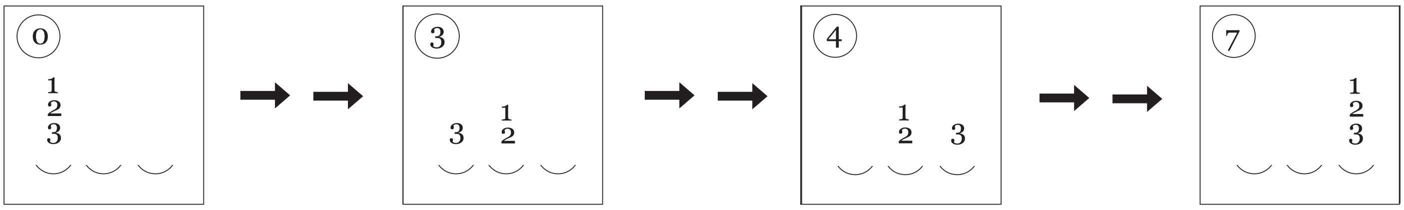
你看得懂上面的記錄嗎？這個狀態到下個狀態之間又是怎樣的運作呢？跟你自己的記錄比較一下，是否一樣呢？

另一個問題是：你怎麼知道 7 步是最少的步數呢？你要不要先想想看如何回答，再繼續看下文？這裡給個提示，答案就在上面的圖示當中。

在數學裡證明最大或最小的時候常常都不很直接，更不可能說「我們全班試了很多次，這樣就是最少步了」這樣的理由是不夠的。即使你能說明，你已窮盡了所有可能的搬法，這樣的證明都會被數學界說成是蠻力法，不優雅。

怎樣從上述記錄中看出最少步呢？注意看上面圖示的狀態⓪～③，若在這些狀態中把 3（即最大的盤子）忽略不看，顯然就是把只有兩層的盤子由 A 柱

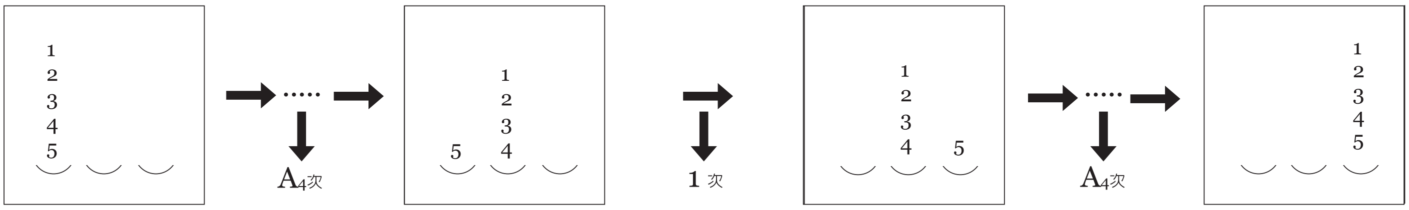
移到B柱；同樣的，從狀態④～⑦中把最大的盤子3忽略不看，則可視爲是將兩層的盤子，由B柱移到C柱。這是什麼意思呢？想想看！



上面的圖示是摘自記錄，讀者不難看到，若沒有狀態③，最大的盤子3無法從A柱移到C柱（狀態③到④；換句話說，若沒有狀態③和④✕，任務是無法完成的。所以，把三個盤子由A柱移到C柱的過程，可以分成三個階段，即⓪到③，③到④，④到⑦。

有了這樣的瞭解，最少步數的計算就單純了。⓪到③以及④到⑦就是移好2層盤子的最少次數，設爲A_2（其實我們已經知道$A_2=3$），則移完3層盤子的最少次數$A_3=A_2\times 2+1=3\times 2+1=7$。這樣的計算可以接受嗎？

上述的計算方式，可以推廣延伸到4層盤子、5層盤子…等的情形。下面，以5層盤子的案例作說明如下：讓我們模仿上述的說法，將此過程分成三段，如下圖所示：



上圖的最左邊是問題的原始狀態，而最右邊則是任務完成後的狀態。從最左邊的狀態到最右邊的狀態，一定得經中間左邊的狀態，最大的 5 號盤子才能從A柱移到C柱，變成中間右邊的狀態。讀者應該不難看到，從左圖到中左圖，若忽略5號盤子不看，則可視爲是4層盤子的狀況；同理，由中右圖到右圖，若將5號盤子忽略，一樣可視爲是4層盤子的狀況。設 4 層盤子的最少移動次數爲 A_4 ， 5 層盤子狀況成功移完的最少次數爲 A_5 ，則有下列關係：

$$A_5 = A_4 \times 2+1$$

欲知 A_5 是多少，須先求得 A_4；但 A_4 又要依賴 A_3 ，其相互間的關係，讀者不妨自己想想，去釐清、求出。這項任務就當作回家功課，留給讀者去完成了。

【四、結語】

本文原先想介紹的另類數學活動，還有「科學普及之數學讀本(含小學的數學繪本)閱讀」活動；可補紙筆測驗無法考到的數學操作能力，兼含補救教學功能的「數學闖關」活動；模仿偵探故事來補制式數學課程中「推理」內容不足的「推理系列」活動；與科學展覽有關的「數學探索」活動；以及「奧林匹克式數學競賽的選手培訓」活動等。但因本文已經太長（本文已有六、七千字。照調查，長度超過四千字的科學文章之讀者，是長度短於三千字的同類文章之讀者數目的一半以下），故文章暫且就此打住。

在離開之前忍不住倚老賣老，再嘮叨幾句話。學生學習數學的目的到底是什麼？我們是希望他知道許多數學知識(當數學老師？爲考試？或者…)呢？還是培養將來會比較有用的數學能力？

當然，好的數學教育結果總是能兩者兼備。但若無法兼顧，我們又該如何取捨？在教育的過程中，老師和家長的見解，對此目標的達成會有甚大差異。譬如以上面河內塔爲例說明，偏重能力培養的話，我們會花比較多的時間，讓學生模索解題方向（將來他長大進入社會，若不是當第三流的公務員，專門處理雞毛蒜皮的例行小事時，總會碰到老師、長輩沒教過解題的非例行性問題，此時他就需要此項能力），和他們多討論建立計算模型時必需注意的事項，而不是只教他們如何用最有效率的方式算出答案。

我們有次在數學遊戲課碰到一個小男孩，當我們宣布要玩河內塔時，他很驕傲地說，他玩過此遊戲。問他從這個遊戲學到什麼時，他說，記得搬移七層

盤子的最少步數是 $2^7-1=128-1=127$ 次。於是，請他移這127步，結果他不會，而且也說不清楚這數目 2^7-1 是怎麼來的。那記住這種知識有什麼用呢？若考試會考到，那也就罷了！但像這種考試絕不會考到的某種數學遊戲之結果(所產生的公式)，也要死背(因講不出道理)，這是什麼學習心態？

讀者也許會問，若要考他是否有養出能力，如何才能考出來？當然，用非例行性問題試試看。當一位學生用死背的方式學數學，而沒養出數學能力時，他面對一道從未見過的非例行性數學問題時，他會手足無措，不知如何是好；大多數就此放棄，小部分會胡亂湊個公式計算一些他自己都不知道意義的數字給你。

國際上最有名的笑話是有位法國的數學教育家，拜託他認識的一些四到八年級的數學老師，在他們的定期測驗中放入如下的題目：

一艘船上載有25隻牛和75隻羊，問船長幾歲？

結果有許多人沒有回答(事後的面談，這些學生說看不懂題意)，然而還是有人回答，最典型的解答是

$75-25=50$，答船長50歲。事後的面談中，他們說出解題的想法：老師出在考卷上的題目是一定有解的；這個題目裡只有 2 個數目，故可以運用加、減、乘、除求答，$25+75=100$，$75-25=50$，$75\times25=1875$，$75\div25=3$，四個數字中，50歲是最可能的答案！

加、減、乘、除的意義何在？他們是不管的。有趣的是，如此作答的學生比例，倒是隨著年級的數目而增加，此事實只暴露了一件悲哀的事：我們把學生越教越笨。下面，給個河內塔範圍的非例行性問題，有興趣的讀者可自行研究探索：若要將下列狀況的五層盤子，全移到 C 柱，有可能嗎？若有，該如何移？最少需要幾步？