從鴿籠原理談起

文／黃敏晃　臺大數學系退休教授

1 從頭說起

鴿籠原理（Pigeon hole principle）是台灣的國中、小學許多數學老師會感到比較陌生的名詞，但在高等數學（大學以上）的材料裡，只要牽涉到點算，卻常被用到。這樣說來，它似乎是椿很高深的學問，其實不然。請看：

> **鴿籠原理**
> 若有n+1隻鴿子要住進n個籠子中，則必有一個籠子裡住有兩隻以上的鴿子。

不難看到，上面原理所說的道理人人能懂，無庸置疑。問題在於如此淺顯的原則，爲什麼會變成高等數學的材料，而不在國中、小的數學課程內加以介紹？而且，筆者幹嘛這麼無聊，寫文章來談這個課題呢？

事實上，這篇文章是被我以前的學生呂玉英逼出來的。她從台北市芝山國小輔導主任退休後的這幾年，常應邀到對岸浙江大學參加每年二次（四月和十一月）的小學數學教學秀（他們稱之爲千課萬人公開課）。此盛會每次歷時四天，除了晚上有論壇（panel discussion）討論數學教育的方向、策略和教學的改進外，白天約有共三十多場著名特級或獲獎老師的真實教學（學童由杭州市的采荷一小配合參與）。觀眾是來自大陸各地的小學數學老師（大部分由學校給公差假，回去要做報告），購票入場觀看教學。

這些受邀做示範教學的老師，還得兼寫別人教學的評點。呂主任有次被要求評點的教學內容，就是鴿籠原

理。她對此課題不熟，返台後就找我討論，本文因此產生。我應該說得更詳細些，這位老師的教材，最後是用鴿籠原理，來解決如下問題：

> 從1,2,3,……,2n這些自然數中，任取n+1個數，則其中必有兩個數互質（relatively prime）。

質數（prime number）是除了1和它自己（≠1）之外，沒有其他因數（即能整除它的自然數）的自然數，如2,3,5,7……等。兩個自然數互質的意思是，它們除1外，沒有其他共同的因數，譬如說9和16互質。現在讀者已懂題意，有興趣者可以暫停閱讀，自己想想看，如何解（其實是證明）這道題目。

這裡順便說一下，此題是匈牙利數學家厄多斯當年到布達佩斯，訪問當時的數學神童波沙時，兩人討論的題目，故在數學史上留有記錄。當年波沙就是利用鴿籠原理給出了一個漂亮的證明。所以，這裡也希望讀者在你的證明中也要應用鴿籠原理。

2 兩種解法

筆者目前在某教育大學兼課，是小學現職老師數學教育碩士進修班的一門課。有一天，我把上述問題，連同鴿籠原理寫在黑板上，要求學生分組討論進行解題。經過熱烈討論，十五分鐘後各小組都提出了部分解答，概略可分為下列兩種形態：

甲、將題目特殊化，譬如說令n=3，2n=6，n+1=3+1=4。此時，在1,2,3,4,5,6,中取4個數，共有= C^6_4（6x5x4x3）÷（4x3x2x1）=15種，如下：

（1,2,3,4）	——1與2互質
（1,2,3,5）	——1與2互質
（1,2,3,6）	——1與3互質
（1,2,4,5）	——1與4互質
（1,2,4,6）	——1與6互質
（1,2,5,6）	——1與5互質
（1,3,4,5）	——1與3互質
（1,3,4,6）	——1與4互質
（1,3,5,6）	——1與5互質
（1,4,5,6）	——1與4互質
（2,3,4,5）	——2與3互質
（2,3,4,6）	——3與4互質
（2,3,5,6）	——5與6互質
（2,4,5,6）	——4與5互質
（3,4,5,6）	——5與6互質

由於上述15種取法是依lexicographic，即英文字典中羅列單字的方式排列，所以很容易分辨它們是否有重覆。

他們也知道這不是「正解」，只是把題目簡化後的解，離開之前的一般性問題之解還甚遠。但是，這樣的做法也是數學界在最前線做研究的數學家常用的手法。因爲如此可讓我們「感覺」到問題的一些脈絡，檢討後至少可以對原來的問題進行部分的攻擊。果然，另一批人就由此得到另一種解法。

乙、由上述取法的具體案例中，我們發現兩數互質的方式，有如下的兩種類型：

A.選取的數中有1，而1與任何自然數都互質；

B.選取的數中有兩個連續的自然數（consecutive nature numbers），而如此的兩數互質。

A的命題（proposition），即1與任何自然數都互質的主張，不證自明。但是，B的命題，即連續的兩個自然數a與a+1會互質的主張，則需要證明。他們證明如下：

設a和a+1有一個公因數d，則a=dk，a+1=dm，其中k和m都是自然數。將上面兩式相減，得：1=（a+1）-a=dm-dk=d（m-k）表示1可以分解成兩個因數d和m-k的乘積。但1沒有1以外的因數，故d=1（m-k當然也等於1），即a和a+1只能有1做為公因數，所以它們互質。

3 一點遺漏

筆者假設，大多數讀者在嘗試自行證明的過程中，應該也經歷了上節提供的解法，能夠認同此解法。但是，乙的解法漏了一點，即沒有證明他們的取法中一定會有A或B的狀況發生。這點由我提出後，他們作了如下的補救：

1. 如果在1,2,3,…… ,2n等2n個自然數中取n+1個數時，有取到1，則就是上述乙之A的情形.
2. 若沒有取1 ,則由2開始選取；若有選到連續自然數，則是乙之B的情形。若盡量避免選連續數，則要隔一個數選，由2開始就只能都選偶數；但偶數只有n個，所以一定要選一個奇數，才能湊足n+1個，而這個奇數一定會和某一個偶數相鄰，形成連續的自然數。

上段補救了漏洞之後，讀者覺得證明完整了沒有？應該算是如此。但是，有沒有解決本文最前面在第一節提出的問題？答案是沒有。因爲前面的問題要求一定得應用鴿籠原理，而上述的解法並未碰到鴿籠原理的邊。厄多斯和波沙到底如何應用鴿籠原理的呢？我的學生很好奇，我應要求，將證明複製如下：

把1,2,3,…… ,2n個用下列方式放入n個籠子中：

（1,2），（3,4），（5,6），……,（2n-1,2n）

現在由這n個籠中取出n+1個數時，一定會從某個籠子裡取到兩個數，這兩個數一定就是相鄰的連續自然數。

感覺怎樣？巧妙吧？有些數學家認為數學是帶有藝術味道的學科（美國有些獨立學院常把數學系放入文學院，liberal art college而非理學院），故數學的學習中，應該包含欣賞，欣賞數學的美。

上述厄多斯和波沙對鴿籠原理的使用，就是數學中的音樂小品——他們把鴿籠原理倒過來用，原來是n+1隻鴿子住進n個籠子，現在他們讓2n隻鴿子住進n個籠中，每2隻住一籠，所以當我們要抓出n+1隻鴿子時，某個籠中的2隻鴿子都會被抓到。

漂亮的證明常會有意外的收穫，由厄多斯和波沙的證明可以看到，此題目基本的關鍵是在相鄰的兩個連續自然數是互質的事實，故可利用他們一定能找到相鄰連續自然數的手法，來擴充原來題目到如下的地步：

> 從任意一個自然數a開始，連續羅列2n個數如下：
> $a, a+1, a+2, \cdots\cdots, a+2n-1$
> 由這2n個數中，任取n+1個數，得其中必有兩個數互質。你會證明嗎？自己想想看。

4 課室討論

我的學生在感嘆之餘，進一步質疑原來那位老師，到底想讓六年級的學童學到什麼？教材會不會太難、太深？學生的認知發展是否成熟到可以理解、掌握這些材料呢？這些問題引發了一些課堂上的討論，略述如下：

甲生說：教材本身沒問題，今天黃老師講的鴿籠原理，我第一次聽到，但覺得很棒。黃老師先提出問題讓我們小組討論來試解，各組報告解法後，再全班一起討論解題歷程，指出我們的缺點，而且沒用到鴿籠原理。最後講述了厄多斯和波沙的奧妙解法，並由此擴充問題，使它更一般

化。用這樣的上課方式介紹新教材，一直是黃老師的典型教學模式。如果那位大陸老師也如此上課，我會認爲是OK的。

乙生說：你不要因爲要拍黃老師馬屁而閃掉問題的重心，即這樣的教材對六年級的小學生而言，是否太深？我們是數學教育的碩士班學生，這樣的教材當然沒問題。而且，那位大陸老師不一定是像黃老師樣，視學生的現場反應而調整既定的教案。換句話說，黃老師若拿此教材去教一班小六生，教學流程一定不是如此。我們剛才的乙之推論，兩個連續自然數互質的形式證明，以及補漏部分，都不是教剛進入形式操作期的小六生能做到的。所以，我倒是想請黃老師說得更清楚些，那位大陸老師是如何進行教學活動的？

我說：我沒有親眼看到大陸老師的教學。照呂主任的描述，他花很長的時間把鴿籠原理和題目由具體的狀況一般化。換句話說，他想將「n」的味道帶出來。他把鴿籠改成鉛筆放抽屜，具體地讓學童操作5枝鉛筆放入4個筆盒，6枝鉛筆放入5盒，一直增加到18枝鉛筆放入17盒才停，體驗「至少有一盒中放二枝以上的鉛筆」之事實。到18枝鉛筆後，他說，這樣講下去是講不完的，有沒有辦法用一句話含蓋所有的狀況？有學生回答說：用n和n+1表示，也有人說用n和n-1。

之後，他舉了二桃殺三士的歷史故事，和13名同學中至少有2人同月生的案例做爲應用。再回到厄多斯和波沙的問題，這時他又再一次將問題特殊化，令n=5,2n=10，在黑板上寫出一列數1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，說10個數中取6個時，一定會有兩個數互質。此時，上課時間已到尾聲，故老師將黑板上的10個數字，相鄰的兩數用括號括起來如下：

（1,2），（3,4），（5,6），（7,8），（9,10）

然後說，括號中相鄰的兩個整數互質。但是，還沒來得及連接到鴿籠原理，就匆忙下課了。

5 意見陳述

丙生說：原來他在教「n」的一般化。小學六年級學童剛好在皮亞傑說的具體操作期的尾巴，正要往形式操作期邁進的關鍵時期。這個時期是可以有這類教材，來刺激小孩的認知發展的。這種嘗試不錯，有實驗精神，我給他肯定。

丁生說：我同意丙同學的說法，即老師要勇於挑戰新的教材教案，看看怎樣的材料學童會喜歡，怎樣的教學法有助於提升學童的認知發展，建立自己的教學風格，這樣才有可能成爲好的老師。但是，我對於使用這個材料，來引導學童學習一般化有些疑慮。

戊生說：我也認爲這個教材不是一般化的好「開山例」。因爲它含有前提和結論，是個典型化的數學命題的樣子，這樣太複雜了。好的「開山例」應該單純的讓學童可以瞻前顧後，即由前項推後項的方式，來掌握簡易的規律即可。

己生說：我贊成你講到簡易數列是好「開山例」的說法。我的女兒現在國中一年級，她對於偶數的一般型態是2n，都要看上半個晚上，看到2=2x1, 4=2x2, 6=2x3, 8=2x4,……的模式後，才算清楚。更不用說是奇數的一般型態2n＋1，以及國中生常見的等差數列的一般項a+nd了。

庚生說：a+nd已經是一般項的「典範例」了，當然是很難的，因爲這裡最主要的概念是「變數」。若己同學沒特別處理，令千金的困難是在看到一個變動的數要用一個符號n來代替。由黃老師的描述看來，我懷疑呂主任在杭州看到的那班學童，可能不是第一次碰到n，不然不可能這麼快就有人講出n，n+1和n-1。

辛生說：庚同學說的也有可能，但我比較傾向於認爲，脫口說出n，n+1和n-1的學童是個別的小孩，家人或安親班、補習班有教過。在大多數的數學課室中，學童的智力、既有經驗都會呈現出差異。這種現象一直是老師教學的困擾，優秀的老師會採用黃老師以前提過的「診斷式」教學模式，來檢驗大部分的學童是否準備好，即有足夠的舊經驗、知識和能力，可以接受老師要進行的新教材。

能在浙江大學秀教學的老師，既然是最優秀的，一定也事先檢驗過的。

壬生說：不管那位老師是否有檢驗，那班學生是否第一次遭遇到n和n+1，從黃老師所描述的呂主任看到的教學，好像並不很順利，最後希望要出來的東西，還是沒出來。顯然是教材太深，不適合小六的學童。問題在於，那位老師爲什麼要選擇這樣的教材呢？

癸生說：可以給小六學生上的教材很多，爲什麼要選這個教材？我看是有點想標新立異的意思。用一般的食材要做一道令人稱奇的菜不容易，需要特別的巧思和細膩的烹調手法；但用特殊食材本身就讓人期待了，這是重視硬體或是軟體的差異。數學的教學，應該也可作如是觀。

6 教材選取

前段所描述的課室討論，無法得到完整的結論。就像目前台灣許多電視台的政論節目一樣，名嘴們各自對新聞事件的內幕瞎子摸象，講出他自己的見解；言談間也許有些爭辯，偶而也會相互啓發，但真象常如神龍見首不見尾。

我認爲數學教育碩士班的課，學生體驗並融入課室的討論文化是最起碼的要求。因爲這樣的討論能讓這群準碩士先把這些數學的教材和教法，形式地的在腦袋瓜裡操弄，連結他在這方面原有的認知結構，而達到後設認知（meta-cognition）。經過如此的運作後，討論的事物通常會清楚許多。

在浙江大學參加千課萬人公開課教學的數學老師，都是大陸各地的「特級老師」，或是參加省級比賽獲一等獎的老師，即是被公認爲數學教學最優秀的老師。據我猜測，這個教學秀的目的有二：一是公開宣傳什麼

是好的數學教學；二是用這場合逼他們進步，提升數學教學的效能。由於每次盛會的每堂教學都錄成CD，公開販售，供各地老師觀閱後討論、模仿，所以第一個功能是顯而易見的。

其次，筆者認為受邀到浙江大學去做示範教學，固然是個榮耀，但他們之間也不免暗中較勁，一定要站在特級教師的身分高度。如何才能與眾不同，彰顯自己的能耐？我相信他們是在教學材料的選取，以及能否展現他自己教學法的獨特性上下了很大功夫的。「撞題」雖未被明文禁止，但一定有些顧忌。所以，鴿籠原理會雀屏中選，可以說是出奇致勝的招術，並不令我意外。

回到整個事件的源頭想一想：什麼是數學教學最重要的？當然是學生的學習。老師存在的目的就是為了要幫助學生學習。那麼，學生是如何學數學的呢？我們又如何才能幫助他們學習的呢？

至於教材選取的問題，應該是次要的事情。當然我也不否認，國中、小學的數學課程中確實有些教材是比較困難的。所以我建議，浙江大學主辦千課萬人的行政單位，不妨事先請全國數學老師票選幾項學生最不容易學習的教材，請來示範的特級老師協商認養，甚至於同一教材用不同的教學設計教教看，讓觀摩者開開眼界。但是，一切的一切，都要以學童的學習作為主要考量，才不會辜負這麼好的教學舞台。

至於學生如何學數學？我們做數學老師的又要如何有效地幫助學生學好數學？可能要花更多的篇幅討論，若有機會，筆者再另外撰文評談。本文就此打住，再見！