骰子賭局公平性之探究

文／蘇柏奇、游淑媛 苗栗縣立興華高中

小時候，筆者年初二總會坐著爸爸開的老爺車，回到路途遙遠的外婆家，途中都會在一個小鎮休息片刻。小鎮的火車站前常有個骰子賭局，該賭局的道具很簡單，僅需要一個碗公、三顆骰子及一張桌子。桌面上畫有六個方格，方格內各有骰子1至6點的圖像，如圖1。

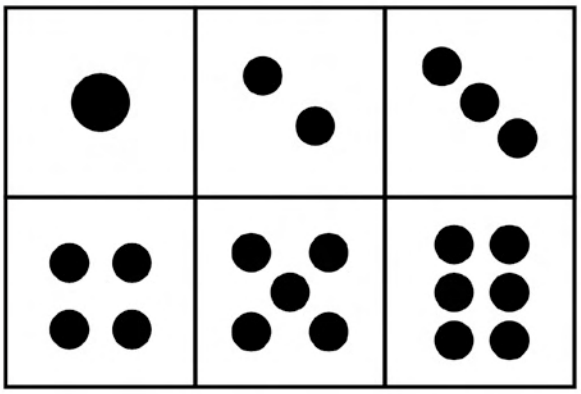

圖1

該賭局的規則爲：

『賭客可以自由押點1、2、3、4、5、6點若干元，押好離手後，莊家就會搖三顆骰子。若你押的點數出現一顆，則莊家賠一倍；兩顆，賠兩倍；三顆，賠三倍；若沒搖出，則莊家通吃。』

乍看之下，押中的機率將近一半（不到一半），運氣好的話，還能得到三倍的賭金，似乎蠻划算的，但賠錢的生意沒人做，這其中一定有問題！筆者透過計算期望值來判別賭局的公平性，並做系列的探討。

一、驗證遊戲是否公平？

我們將三個骰子予以編號，並以數對的形式來紀錄點數，例如：將第一顆骰子出現1點，第二顆出現2點，第三顆出現3點的情形紀錄爲 （1, 2, 3）。因爲無論押哪一種點數，輸贏並無差別。所以，不妨假設押1點1元，各種情形如下表：

表1

出現情形	個數	機率	輸贏金額
恰有一個 1 點 如：(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), …	75	$\frac{75}{216}$	1
恰有兩個 1 點 如：(1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), …	15	$\frac{15}{216}$	2
恰有三個 1 點 如：(1, 1, 1)	1	$\frac{1}{216}$	3
沒有出現 1 點 如：(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 2, 5), …	125	$\frac{125}{216}$	-1

計算期望值：

$$\frac{125}{216}\times(-1)+\frac{75}{216}\times 1+\frac{15}{216}\times 2+\frac{1}{216}\times 3=-\frac{17}{216}=-0.0787...$$

故此賭局對莊家有利。

二、探討敗中取勝的方法：

有無方法可改變賭局的期望值？直覺猜想，倘若同時押兩種以上的點數，可提高中獎的機率，但若所押的點數都未出現，就損失更多錢。有得有失下，可否反敗爲勝？假設押1點、2點各1元，情形如下：

表2

出現情形	個數	機率	輸贏金額
恰有一個 1 點 如：(1, 3, 3), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), …	48	$\frac{48}{216}$	0
恰有一個 2 點 如：(2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), …	48	$\frac{48}{216}$	0
恰有兩個 1 點 如：(1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), …	12	$\frac{12}{216}$	1
恰有兩個 2 點 如：(2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (2, 2, 6), …	12	$\frac{12}{216}$	1
恰有一個 1 點、一個 2 點 如：(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), …	24	$\frac{24}{216}$	2
三個 1 點 或 三個 2 點 如：(1, 1, 1), (2, 2, 2)	2	$\frac{2}{216}$	2
一個 1 點、兩個 2 點 如：(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 1, 1)	3	$\frac{3}{216}$	3
兩個 1 點、一個 2 點 如：(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)	3	$\frac{3}{216}$	3
沒有出現 1 點、2 點 如：(3, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 3, 6), …	64	$\frac{64}{216}$	-2

計算期望值：

$$\frac{64}{216}\times(-2)+\frac{96}{216}\times 0+\frac{24}{216}\times 1+\frac{2+24}{216}\times 2+\frac{6}{216}\times 3=-\frac{34}{216}=-0.1574.....$$

下注2元時，期望值約爲－0.1574元，若以下注1元而言，則約爲－0.0787元，兩種押法的期望值相同！若押更多點數，期望值仍會相同嗎？

假設最極端的狀況，六個點數各押1元，情形如下：

1. 出現三種不同的點數，獲得3元；損失其它押金3元，沒有輸贏；
2. 出現兩種點數（其中一種出現兩次），獲得3元；損失其它押金4元，合計賠1元。
3. 出現一種點數，獲得3元；損失其它押金5元，合計賠2元。

故當六點全押時，最好的狀況是平手，而點數重複時，就賠錢了。然而，期望值是否相同？在Excel中列出投擲三顆骰子的216種情形（節錄如圖2），利用countif、if及sum等函數來計算，得輸贏金額合計－102爲，若以下注1元而言，

期望值為 $\frac{-102}{216} \div 6 = -0.0787...$ 。

六點各押 1 元的情形

序號	骰子的點數			出現次數統計						各種點數之輸贏						小計
	第一顆	第二顆	第三顆	1點	2點	3點	4點	5點	6點	1點	2點	3點	4點	5點	6點	
1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	3	-1	-1	-1	-1	-1	-2
2	1	1	2	2	1	0	0	0	0	2	1	-1	-1	-1	-1	-1
3	1	1	3	2	0	1	0	0	0	2	-1	1	-1	-1	-1	-1
4	1	1	4	2	0	0	1	0	0	2	-1	-1	1	-1	-1	-1
5	1	1	5	2	0	0	0	1	0	2	-1	-1	-1	1	-1	-1
6	1	1	6	2	0	0	0	0	1	2	-1	-1	-1	-1	1	-1
7	1	2	1	2	1	0	0	0	0	2	1	-1	-1	-1	-1	-1
8	1	2	2	1	2	0	0	0	0	1	2	-1	-1	-1	-1	-1
9	1	2	3	1	1	1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	0
10	1	2	4	1	1	0	1	0	0	1	1	-1	1	-1	-1	0
11	1	2	5	1	1	0	0	1	0	1	1	-1	-1	1	-1	0
12	1	2	6	1	1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	0
212	6	6	2	0	1	0	0	0	2	-1	1	-1	-1	-1	2	-1
213	6	6	3	0	0	1	0	0	2	-1	-1	1	-1	-1	2	-1
214	6	6	4	0	0	0	1	0	2	-1	-1	-1	1	-1	2	-1
215	6	6	5	0	0	0	0	1	2	-1	-1	-1	-1	1	2	-1
216	6	6	6	0	0	0	0	0	3	-1	-1	-1	-1	-1	3	-2
														合計		-102

圖2

在同一個工作表中，刪除4、5、6點的輸贏，即可得押1、2、3點各1元的輸贏總計（節錄如圖3）。

1、2、3點各押 1 元的情形

序號	骰子的點數			出現次數統計						各種點數之輸贏						小計
	第一顆	第二顆	第三顆	1點	2點	3點	4點	5點	6點	1點	2點	3點	4點	5點	6點	
1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	3	-1	-1				1
2	1	1	2	2	1	0	0	0	0	2	1	-1				2
3	1	1	3	2	0	1	0	0	0	2	-1	1				2
4	1	1	4	2	0	0	1	0	0	2	-1	-1				0
5	1	1	5	2	0	0	0	1	0	2	-1	-1				0
6	1	1	6	2	0	0	0	0	1	2	-1	-1				0
7	1	2	1	2	1	0	0	0	0	2	1	-1				2
212	6	6	2	0	1	0	0	0	2	-1	1	-1				-1
213	6	6	3	0	0	1	0	0	2	-1	-1	1				-1
214	6	6	4	0	0	0	1	0	2	-1	-1	-1				-3
215	6	6	5	0	0	0	0	1	2	-1	-1	-1				-3
216	6	6	6	0	0	0	0	0	3	-1	-1	-1				-3
														合計		-51

圖3

同理，刪除5、6點的輸贏，即得押1、2、3、4點各1元的輸贏。試驗各種押法，整理如表3。不難看出，不論押幾個點數，以下注1元而言，期望值皆相等。換言之，並無法透過多押幾種點數來扭轉輸贏。

表3

所押之點數	押金	輸贏金額	期望值（下注1元）
1	1	-17	-0.0787
1、2	2	-34	-0.0787
1、2、3	3	-51	-0.0787
1、2、3、4	4	-68	-0.0787
1、2、3、4、5	5	-85	-0.0787
1、2、3、4、5、6	6	-102	-0.0787

各點數押不同金額時，期望值仍會相同嗎？嘗試1點押1元、2點押2元、3點押3元的情形（節錄如圖4），可看出期望值與六點各押1元時相同。

1點押1元、2點押2元、3點押3元的情形

序號	骰子的點數			出現次數統計						各種點數之輸贏						小計
	第一顆	第二顆	第三顆	1點	2點	3點	4點	5點	6點	1點	2點	3點	4點	5點	6點	
1	1	1	1	3	0	0	0	0	0	3	-2	-3				-2
2	1	1	2	2	1	0	0	0	0	2	2	-3				1
3	1	1	3	2	0	1	0	0	0	2	-2	3				3
4	1	1	4	2	0	0	1	0	0	2	-2	-3				-3
5	1	1	5	2	0	0	0	1	0	2	-2	-3				-3
6	1	1	6	2	0	0	0	0	1	2	-2	-3				-3
212	6	6	2	0	1	0	0	0	2	-1	2	-3				-2
213	6	6	3	0	0	1	0	0	2	-1	-2	3				0
214	6	6	4	0	0	0	1	0	2	-1	-2	-3				-6
215	6	6	5	0	0	0	0	1	2	-1	-2	-3				-6
216	6	6	6	0	0	0	0	0	3	-1	-2	-3				-6
															合計	-102

圖4

經由上述討論可知：透過多押幾種點數或改變下注方式來改變期望值的方法並不可行。這樣的結論並不意外，我們可以這樣想像：

1.假設下注1元時，賭局期望值爲 b 元；

2.當下注t元時，可視爲t次下注1元的賭局，因爲每個點數的期望值都相等，不論下注方法如何變化，期望值爲 bt 元；

3.以下注1元而言，期望值需除以 t ，故期望值仍是 b 元。

三、公平的賭局：

若無法過變換下注方法來提高勝算，那麼有無可能修正規則，使其變成期望值爲0的公平賭局？

（一）賠率：

首先想到的是當賭客押中時，莊家應該給更多錢。若將出現所押點數一顆時，所賠金額與押金的比值稱爲「賠率」，則使本賭局期望值爲0的賠率爲何？

假設賠率爲 t ，押1點1元時，計算期望值：

$$\frac{125}{216}\times(-1)-\frac{75}{216}\times t+\frac{15}{216}\times 2t+\frac{1}{216}\times 3t=\frac{-125+108t}{216}$$

若期望值= 0，則得 t =1.157.....。

（二）骰子顆數：

除了提高賠率外，投擲更多顆骰子也會改變期望值，則使本賭局期望值爲0的骰子顆數爲何？

已知投擲三顆骰子的期望值爲-0.0787，考慮投擲四顆骰子，押1點1元時，計算期望值：

$$\frac{625}{1296}\times(-1)+\frac{500}{1296}\times 1+\frac{150}{1296}\times 2+\frac{20}{1296}\times 3+\frac{1}{1296}\times 4=0.1844.....$$

由期望值看來，投擲三顆骰子對莊家稍微有利，而投擲四顆骰子則對玩家相當有利。

四、結論

經一番探索後，對這以前常見的民間賭局有深入的認識，該賭局雖對莊家有利，但在現實考量下（賠率及顆數須爲整數）仍可被雙方接受。過程中最大的收穫是瞭解數學的威力，透過分析可以判斷賭局的公平性，進而說明如何修正才公平。然而十賭九輸，最好少賭爲宜！