

玩弄數學問題

資優數學的星光大道(1)



文／白榮銓

作者：黃敏晃
 插畫：郭莉蓁
 出版社：翰品文教出版社
 出版日期：2011年4月

黃敏晃教授曾任教於臺大數學系，長期致力於國內數學課程與教材的研究與修訂，對於國內的數學教育有很大的影響和貢獻。本書是黃敏晃教授和一群數學教師組成教學研究團隊，定期聚會，共同探究中小學的數學教材和教法，經過教學實施、對外發表後彙編成書（另附有操作手冊）。

本書共有八章，依序為：消失的太陽、由分馬問題談起、假面算術、九宮陣法巧布局、 x 地來的 y 小姐、玩弄數學題目、閒話數學推理、淺談唐圖。

各章內容大多取材於日常生活，目的是避免因數學的抽象特質造成學生的學習困難，並透過數學遊戲，希望幫助中小學學生由數學直覺的具體操作期 (concrete operational stage)，循序漸進至運用邏輯推論解決問題的形式操作期 (formal operational stage)。

以「第1章 消失的太陽」為例，為了引起學習動機，作者首先在《消失的單位面積》單元，提出探索的問題，如下：

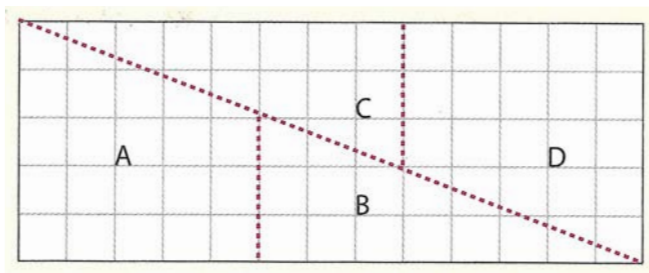


圖1 切割前的長方形面積為 65cm^2 。

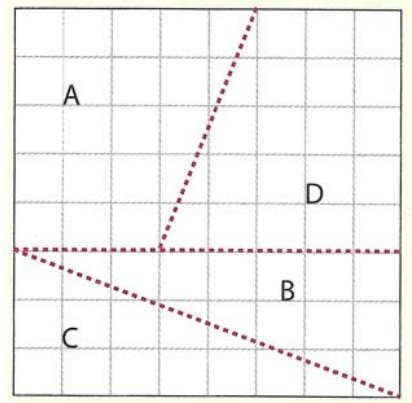


圖2 重組後的正方形面積為 64cm^2 。

將一個 5×13 的長方形，切割成 A、B、C、D 四塊（圖 1），再將這四塊重新拼湊成正方形（圖 2），為什麼原來的長方形面積 $65(5 \times 13)$ ，經過切割重組成正方形後，面積卻變成 $64(8 \times 8)$ ？少了一個單位的面積！

接下來的單元，依序為《浮面的數字結構》、《費波那齊的數列》、《畢氏學派五芒星》、《斜率小差大不同》和《圖形魔法大檢驗》等單元。

為了評量學生是否了解「物件從圖形消失」之謎，以圖 3 為例，請學生將 A、B、C、D 和小太陽，分別剪取下來，含小太陽的圖塊捨去不用，將其餘的元件重新組合（如圖 4），並正確指出「圖形經切割、重新組合之後，面積不相等」的奧妙。

由上述可知，教師可以運用操作手冊的附圖，讓學生實際動手裁剪和組合，進行輕鬆有趣的數學遊戲，藉此提升學生的學習興趣，從中體驗數學在日常生活的應用，習得相關之數學知識與能力，學生也可以透過其中蘊含的數學原理，進一步設計出不同的藝術圖案，與他人分享。這樣的教材具備「以符號、

圖形，口語或書寫的形式，運用巧妙的數學原理進行創作和表達」之特色，應有助於培養學生運用數學語言表達與溝通的能力。

數學题目的情境可以隨意變化，但是情境雖然有別，解題方式卻可能相似，對於學生而言，將適當的數學概念從一個题目的情境，遷移到另一個情境，並不如想像之容易，要培養這種思考能力，教師可以將學生透過分組，讓小組成員彼此充分溝通互動，進行合作學習。

以「第 6 章 玩弄數學題目」為例，作者首先在《逆向思考》單元提出探索的問題，如下：

某餐館只有情同姊妹的三位女侍，她們習慣每天共享有全部小費（暫時放在櫃台後一個錢筒內，下工返家前均分拿走），有一晚，甲回家後，從錢筒裡拿了三分之一的錢後，留下 960 元。次日中午前甲最早到店，發現昨晚留下的 960 元，原封不動留在筒中。她問後來陸續到店的乙和丙，她們都說昨晚有從筒中拿走三分之一的錢才回家，原來甲竟是三人中最後離店的，請問昨天收到的小費總共多少元？



圖3 切割前的正方形。

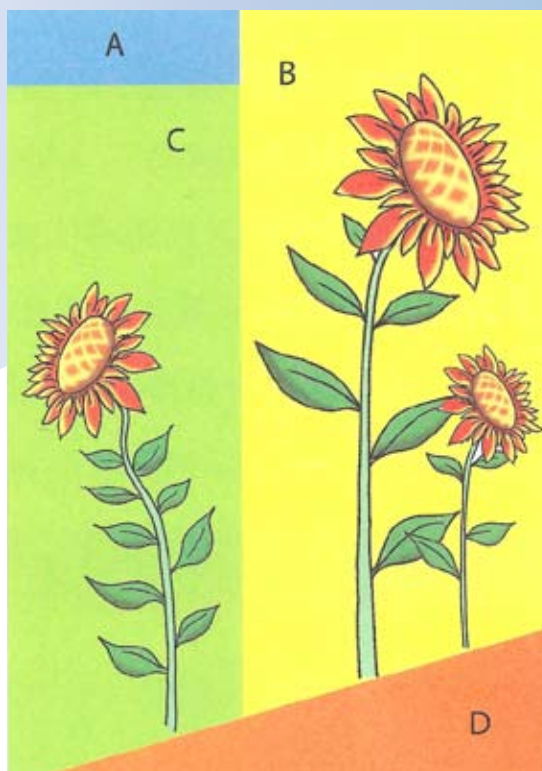


圖4 剪開後重新組合的形。

接下來，作者在《多元解法》單元，繪出流程圖（圖 5），提出心中預想的解法和答案，如下：

依據流程圖後面的標示文字，因為甲拿走 $\frac{1}{3}$ 後，剩下 960 元，故 960 元是 B 的 $\frac{2}{3}$ ；而甲拿走 B 元的 $\frac{1}{3}$ ，這表示甲拿走了 960 元的一半，也就是 480 元；由此可知 $B = 960 + 480 = 1440$ 元。

依據流程圖中間箭頭的標示文字，因為丙拿走 $\frac{1}{3}$ 後，剩下 B 元，已知 $B = 1440$ 元，故模仿上段的計算過程，可以算出 $A = B + \frac{1}{3}B = 1440 + 480 = 2160$ 元。

依據流程圖前面箭頭的標示文字，因為乙拿走 $\frac{1}{3}$ 後，剩下 A 元，已知 $A = 2160$ 元，故模仿上段的計算過程，可以算出當天總共的小費 $= A + \frac{1}{3}A = 2160 + 720 = 2880$ 元。

教學實施時，將全班 30 位學生分成 6 組，各組派代表在黑板書寫解法和答案，因為有些組對於「甲、乙、丙離開的順序」有不同的解讀，例如有的組認為「乙、丙兩人一起先走，甲後來再走」，有的組認為「乙先走，丙次走，甲最後走」，有的組認為「乙先走，丙次走，甲最後走，但丙和甲都不知道有人先走，以為自己是第一個走的人」，有些組另有其他想法，結果導致黑板上出現了 6 種不同的解法及 5 種不同的答案。

到底哪一組的「解法」和「答案」才是正確的呢？作者請各組代表，輪流上台報告解題想法，各組相互提出質疑和答辯，最後作者告訴學生有三組的解法都是正確的。因為數學課本的題目，目的是要讓學生應用某種特定的數學知識或方法解題，故常常是題意明確，但

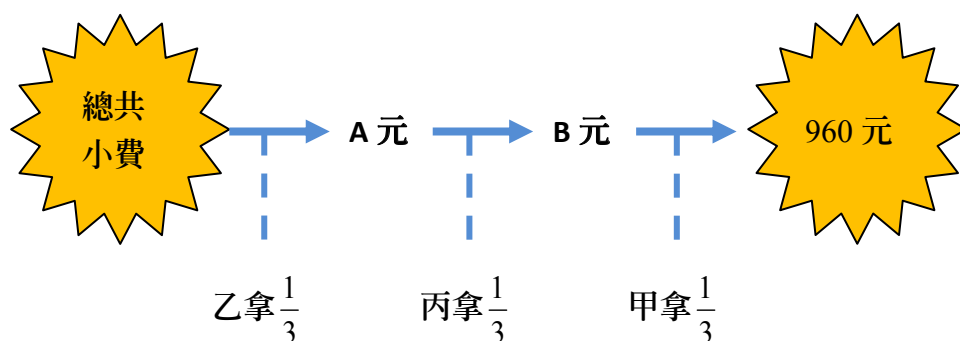


圖5 將例題的故事情境，繪出流程圖。

日常生活面對的真實問題，不一定如此單純，就像面對同一例題，而各組學生可能思考出不同的解法。

由上述可知，類似「玩弄數學題目」的教材與教法，可以幫助學生藉由小組合作，嘗試錯誤，利用推論，尋求各種解決問題的途徑和策略，然後選擇判斷其中最適當的解法與答案。

九年一貫數學課程綱要（97 課綱）的課程目標，提到「我們希望課程目標的達成，可以培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的態度及能力」。

因此教師可以透過閱讀「資優數學的星光大道（1）—玩弄數學問題」的內容與心得，融入中小學的數學教學，配合學生不同階段的需求，設計與日常生活情境相關的應用問題，引導學生的數學經驗和感覺，藉此協助學生數學智能的發展，培養學生的演算能力，豐富學生

在抽象層次上的思考能力，及深化學生的邏輯推論能力；在教學實施時，教師應盡量採取與學生雙向溝通的教學方式，了解學生的學習困難，藉此培養學生的數學溝通能力及建立數學學習的正面態度。（本文作者為臺中市居仁國中退休教師）