閱讀生活中的數學

文／賴以威

前言

現今科技資訊時代，數據分析、人工智慧成了各行各業的重要工具，而運算數據、設計人工智慧、演算法都需要高度的數學知識。伽利略曾說「大自然是一本數學寫成的書」，在科技文明的現代，數學已經成了各領域的專家語言。其實，數學是一種思考方式，是一種描述規律、分析事物的學問。因此在日常生活中，便有許多可以活用數學之處。本文將以作者淺薄的數學科普經歷，與大家分享生活中的數學，看見畢達哥拉斯所說的「萬物皆數」。

壹、數學是一種思考方式

108 課綱提倡素養教育，其中針對「數學素養」的部份，許多人所感受到最大的差異即是各式各樣的情境題，要求學生在不同的情境中，轉換線索，形成數學問題。換句話說，即是將文字情境翻譯成由數字、符號組成的數學語言。當然，實際上的數學素養所指絕不僅限於生活情境，而純數學知識的教育、理解仍然相當重要，是學習數學的基礎。但這樣的轉變，某種程度上反映出現今數學的高度應用價值。

伽利略曾說「大自然是一本數學寫成的書」，在過去科學家研究天文、物理等自然現象時，發現數學能捕捉隱藏在背後的規律，不僅能提高測量或觀測的精準度，甚至可以計算出無法觀測到的事物，或是預測之後將發生的現象。到了科技高度堆疊的現代，我們的日常生活被數位化、數據化，電腦與穿戴行動設備普及，通信網路便利，這一切讓人類累積了前所未有的龐大數據，演算法、人工智慧、資料科學因應而生，而在這「人造大自然」的科技背後，數學依然扮演相當重要的角色，是許多科技的重要骨幹。

美國就業網站 CAREERCAST 在 2019 年公布的十大理想職業中，即有六項職業與數學高度相關。可以想像見這樣的趨勢在未來只會持續增加，也難怪幾年前曾有國立大學校長在報導中高呼未來將是「大數學時代」。前述所提及的數學能力，包括了對數學知識的理解精熟，以及活用數學的能力。

伽利略說數學是一種語言，當代數學家 Jordan Ellenberg 在《數學教你不犯錯》中則說「數學是擴充直覺的工具」，因為我們的直覺雖然快速、且在大多時候很有用，但直覺並不能幫我們把一件很複雜的事情想得很透徹，直覺也無法輕易窺見隱藏在事物背後的邏輯、規律。要做到這些事情，唯有運用數學工具輔助，運用數學思維來分析、處

理問題。

在本篇文章中，我將舉幾則生活中的數學為例，展現數學思考與直覺思考所看見的不同風景，以及數學思考的價值；我們將特別從遊戲與設計兩個方向，各介紹兩組有趣的例子。

貳、遊戲中的數學

古希臘數學家畢達哥拉斯曾說「萬物皆數」，它的真正意義跟我們此處想表達的或許不盡然完全相同，但依然很適合借用來闡釋——生活中處處皆數學。

一、猜字遊戲

舉例來說， Wordle 是一款從 2022 年初起開始爆紅的猜字遊戲，每次猜一組 5 個字母的單字，如果跟答案有一樣的字母但位置不同，該字母會用黃色格子表示 ；若位置也正確，則該字母會用綠色表示 ；若沒有這個字母，則以灰色格子呈現 。根據資料，Wordle 的答案有 2315 組單字。玩家目標就是利用每次猜測的色塊線索，排除不可能的選項，找出答案。

玩這款遊戲時，許多人會發展出自己的策略。例如有人想要前幾次就先把母音測一輪，有人則往常見子音下手，盡可能製造出「綠色」或「黃色」；可也有人喜歡走偏鋒放冷門字，倘若猜中，能一口氣快速縮小尋找範圍。究竟哪個好，還說不得準，因為容易出現的字母就算猜到，可行解依然很多；冷門字母雖然不好猜，可一猜到效果絕佳。

你可以想像，這就好像來到彩券行，有兩種樂透供你挑選，一種是中獎機率高但獎金低，另一種是中獎機率低但獎金高。客人，請問你想買哪種樂透呢？

用樂透做譬喻，大家應該就可以想到不能光看中獎機率高低或獎金大小，要合在一起算期望值。Wordle 猜字策略也是類似的道理，不過它要算的更複雜一點，是稱之為「熵(entropy)」的不確定性的期望值。

換句話說，在這個遊戲裡儘管我們能用直覺想出各種猜字策略，但如果運用了數學思維，將它看成一道題目時，選擇正確的數學工具，我們便能破解整個猜字遊戲，得出該使用哪一個單字開局，甚至推出扣除運氣成分，平均最多也需要花幾步來完成。

這邊要特別說一下，許多人可能是第一次聽到「熵」，但它其實早就出現在你我的日常中，對現今生活有著巨大的影響。因為它是通信技術發展的重要參考理論工具。現在我們能有這麼便利的無線通信技術，「熵」的概念與後續發展出的資訊理論

（information theory）扮演了很重要的角色。

二、滅鼠先鋒

除了 Wordle，風靡於小學生族群的「滅鼠先鋒」也是此類的經典案例。滅鼠先鋒是色彩繽紛，形狀多元的軟墊，上面有可重複按壓的泡泡，按下去的手感讓人舒壓。被稱為滅鼠先鋒，顧名思義就是每顆泡泡都可以想成一隻老鼠。二個人輪流按 1~3 顆，最後全部按完的人就輸了。你想一想就會發現，這個對決充滿了數學，甚至說它是一道數學式子也不為過。能寫出式子的人，就能掌握必勝法！

實際觀察孩子們玩，大人會發現通常只要玩上幾回，孩子們都會下意識開始推理，自發性找到規則如下：

✦ 規則一：為了讓對方「按完」，我只能留給他 1 顆。剩下 2、3、4 顆我都會輸，因為對方能分別按下 1、2、3 顆，剩 1 顆給我，那我就輸了。

✦ 規則二：如果剩下 5 顆呢？好像不錯噢！因為對方不管怎麼按，都會剩下 2、3、4 顆。他無法只留下 1 顆，讓我輸。輪到我來按時，只要按下 1、2、3 的數目，就可以剩 1 顆給他啦！

以上這二條規則，幾乎所有孩子都會想到。因此，遊戲進行到一半時，就會有人盯著還剩 5 顆泡泡，搖頭認輸。更有趣的是，很快的，玩家或旁觀者會發現「剩下 9 顆」時，勝負已定。因為我們此時已經可以推論出第三條規則。

✦ 規則三：當剩下 9 顆時，不管對方怎麼按，我只要按下對應的數量，讓我跟對手一共按下 4 顆。我就可以剩 5 顆給他。根據規則二，這時我就會獲勝啦。

到這邊為止，我們已經看見必勝的數列了。事實上，剩下 13 顆時也能獲勝，因為再輪到你時，你可以確定能剩 9 顆給對方。繼續往前推，就像過河時要依序踩在正確的石頭上：

21、17、13、9、5、1 就是我們要看好，牢牢踩住的勝利數字。

這些數字，用數學的說法是「除以 4 餘 1」，或表示成(4n+1)。到此為止，勝利方程式已經越來越清楚。假設一開始是 26 顆，25 是「除 4 餘 1」中最接近，且小於 26 的數字。所以只要按下 1 顆變成 25，接下來依據留給對方 21、17...就能確定獲勝。總結來說，滅鼠先鋒的必勝法就是

❶ 數數看板上有幾顆

❷ 趕快讓自己按完後，變成「除以 4 餘 1」的數字

❸ 對方按 x 顆，你就按(4-x)顆。

滅鼠先鋒的玩法與規則有各種不同的版本，這邊只是針對其中一種來介紹如何運用數學思考。有興趣的人可以針對其他的版本，就像數學的例題與類題、習題一樣。破解其他的滅鼠先鋒版本。

參、設計中的數學

生活中常出現的各種商標、logo 中也有各種數學元素。

一、小米 logo

2021 年小米公布了耗時 3 年、斥資台幣 867 萬的新 logo，由打造無印良品的日本知名設計師原研哉精心設計。新商標看起來是一個 4 個稜角較圓滑的方型圖案。不過，當時在發布會上，原研哉說這其實不是圓角方形，而是「超橢圓(superellipse)」，其方程式是：

$$|x/a|^n+|y/b|^n=1$$

小米 logo 所用的超橢圓則是 a=b=1 的特殊狀況，所以可以簡化成

$$|x|^n+|y|^n=1$$

如同原研哉所說，只要變換 n 的數值，就能創造出長相非常不同的超橢圓。比方說，當 n 在 0 到 1 時，超橢圓就一點也不圓，而是四邊往內凹的四角星✧。

二、東奧 logo

2021 年七月東京奧運揭幕，眾人關心的奧運賽事之餘，又發現東奧 logo 是一個充滿數學元素的設計。東奧 logo 是由擅長運用幾何圖形的設計師野老朝雄所操刀，使用了日本江戶時代傳統圖紋「市松紋」，上面的矩形花紋，如果變成綠與黑的配色，你腦海裡大概就會浮現《鬼滅之刃》主角炭治郎的身影。

為了凸顯在奧運時，齊聚世界各地的運動員，野老朝雄在原始的市松紋以外，新增了 2 種不同長寬的矩形。3 種尺寸相異的藍色矩形，分別象徵國家、文化及思想的「多樣性」。矩形與矩形相接的頂點，則代表各國在奧運中「調和」差異，連結彼此的精神。再仔細觀察一下 logo，可以看見所謂的「松葉」，是由 3 組細長矩形所組成。整個 logo 共計剛好也有 3 套松葉，而且呢，再仔細看看，整個 logo 其實正是以松葉做為分界線，由 3 塊一模一樣的弧形圖案組成。換句話說，東奧 logo 是由一組弧形圖案重複 3 次，

每次旋轉 120 度所組成。正是因為隱藏了這樣的旋轉對稱，我們在視覺上便會感到和諧、規律。

除此之外，logo 中的 3 種藍色矩形也暗藏玄機。要看出規律，我們可以在每個矩形外畫出一個對應的「菱形」。畫好後你會發現， logo 的環狀圖案變成了一個「正 12 邊形」。這個正 12 邊形是由正方形、60°－120°、30°－150°這三種不同菱形所組成。每個菱形邊長中點相連，就會形成一個矩形。將所有矩形塗上深藍色，再把菱形擦掉，就可以得到東奧 logo 了。如果你有熟悉的感覺，這或許跟數學幾何題裡偶爾需要的輔助線一樣，原本怎麼看都不懂的題目，一畫輔助線就全破了。

最後，選擇正方形、60°－120°、30°－150°菱形也有它的意義。事實上，東奧 logo 完全可以用小孩子玩的「六形六色」重現，之所以六形六色或東奧 logo 都選擇同樣的菱形，這不是沒有原因的。因為，如果要運用這些菱形鑲嵌，拼起來的角度必須是 360。這可以是 4 個正方形的 $90 \times 4 = 360$ 也可以是 $150 \times 2 + 60 = 360$ 或是 $90+120\times2+30 = 360$。有興趣的朋友，應該還可以從 logo 中找出其它的組合。如果今天使用其它角度的菱形，或許就無法拼出這麼多元的組合，甚至會有些拼不起來的狀況。

圖 1. 小米 logo

資料來源：https://www.mi.com/tw/

圖 2. 東奧 logo

資料來源：https://zh.wikipedia.org/wiki/2020 年夏季奧林匹克運動會

肆、總結

上述的遊戲與設計的 4 個例子，都是我們曾經在數感實驗室粉絲頁所討論過的議題，可以看到，它們表面上跟數學無關，但深入探究時都會發現需要用運用到更多數學工具，或甚至議題本身就是數學。又好比影響全球日常的 COVID-19 疫情，也讓我們看見，原本好像跟數學無關的醫療公共衛生，當我們非常關心，想要盡可能掌握疫情狀態時，我們需要如 SIR 疾病傳染模型，這裡面運用到了微分方程；R_0 值代表的是指數成長的疾病擴散；CT 值量化感染者體內的病毒量，但它卻是數字越小病毒量越高，原來它是再計算「放大幾次後可以被檢測到」，所以放大越少次就能被檢測到，表示原本的病

毒量越高。期望透過本文，能讓各位更加感受到「萬物皆數」，也能培養在生活中遇到關鍵問題時，能運用數學思維，選擇正確的工具與解題方式，幫助我們做出更高品質的決策。

賴以威

國立臺灣師範大學電機工程學系副教授