連結舊概念和方法的數學感教學
——面的大小比較

文／李源順、詹明霞

前言

學生在學習的過程中，能了解現在所學與以前所學概念／方法的異同（第五個核心內涵的教、學策略），可以讓學生的學習形成一個整體的概念，形成數學感。因此老師在教學的過程中，應該設法讓學生能連結概念／方法，了解現在所學的概念／方法與先前概念／方法之間的關聯。

本文旨在報導學生學過直線段的長短比較之後，二年級老師在進行面的大小比較的教學過程與內容。對比直線和曲線的意義與長短比較，老師在一堂課的教學過程中，先複習平面和曲面的意義，再進行面的直觀比較、直接比較，最後進行課程統整，希望學生能學得數學感與帶得走的能力。至於間接比較、個別單位比較則是後續的教學內容。

因為二年級學生大部分都還在具體操作期，因此老師準備了很多具體教具讓六組學生實際操作。具體教具包括一套盒子和罐子，以及每一組都有的毛巾、熱熱貼、紙張、愛心卡片和信封等等。

複習的意義與手勢的感覺：準備活動

一開始教師提問：「聖誕節快到了，老師這裡有一些盒子和罐子，可以怎麼分類？你為什麼要這樣分？（圖一）」老師的意圖是要引動學生回想一年級所學的，利用平平的面（或平面）和彎彎的面（曲面）來分類，同時使用手勢平平與彎曲來回擺動的動作產生平面與曲面的動作感覺。學生的回答是「球面摸起來彎彎的」，「口罩盒摸起來平平的」，「兩個口罩盒可以疊上來，但是球無法疊在口罩盒上，因為它沒有平面只有彎彎的面」。但老師也發現，有部份學生忘了要用手來回擺動。

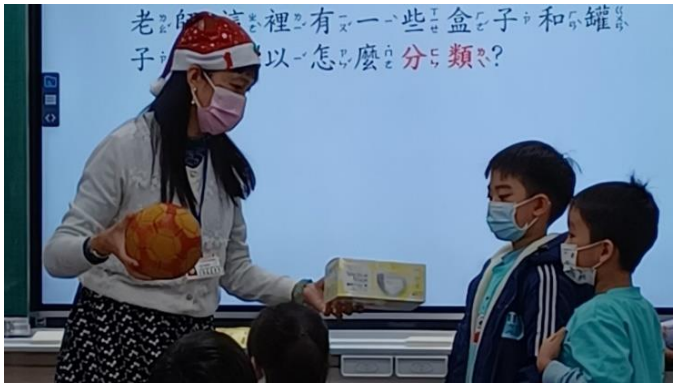

圖 1. 複習舊概念——平平的面、彎彎的面

老師要求學生來回擺動，主要是想讓學生從學生的手勢（方法）中產生平面、曲面的直觀意義概念，以利學生能從手勢動作中直觀的區別與先前學過的邊（線段）、（頂）點和角的感覺與意義。作者的實務經驗發現，有些學生不管邊、角、頂點、面，都是用「點」的手勢在比，例如點在平面的內部一點，並說「這裏是面」，造成後來在點算長方形的面積時，是點算長方形內部、或者包括在長方形邊上的格子點的迷思概念。因此，養成學生對圖形的不同構成要素使用不同手勢的感覺非常重要。

之後老師再請學生「找一找教室裡，哪裡有平平的面嗎？ 哪些不是平平的面？用手比比看」。此時老師也在進行評量，了解學生是否能利用剛才複習的手勢來區分平面和曲面。經過這樣的教學過程，已經有更多的學生學到了動作的直觀感覺。

在這邊要注意的是，12 年國民基本教育數學領域課程綱要中，小學的教學內容有直線、曲線、平面的名詞，教科書也有出現這三個名詞，但沒有出現曲面的名詞，而使用彎曲的面。到了高中再出現二次曲面的名詞。作者對比直線和曲線的概念，建議老師可以連結直線和曲線，而教曲面的名詞，讓學生了解面也可以分成平面和曲面的類似概念，形成一個整體的數學感覺。

面的比較

學生剛開始接觸面的比較，大致可以分成：直觀比較、非平面的比較需要攤開成平面、生活中面的內隱知識、直接比較。至於面的間接比較、個別單位比較、普遍單位比較，不在本文的說明範圍。

直觀比較——了解面的比較之用語

量的直觀比較之主要教學目的，是在讓學生了解生活中量的比較時所使用的語言可能相同、可能不同，例如長度的比較是使用長、短的用語，重量的比較是使用輕、重的用語，面的比較則是使用大、小的用語，數的大小比較也是用大、小的用語。

老師拿出一條毛巾問:「這一條毛巾平平的面在哪裡？這一條毛巾有多大？（圖二）」老師的意圖是要學生用手勢來回擺動了解平面的概念，以及有完整外框限制的感覺。之後提問：「你覺得這條毛巾和黑板的平面，哪個比較大？哪個比較小？」讓學生從差異很大的面了解黑板的面比較大，毛巾的面比較小，黑板的面比毛巾大，毛巾的面比黑板小。

圖 2. 學生用手勢指出面在那裏、面有多大

作者反思發現，通常教科書會直接用上述的用語，讓學生了解面的比較是用大、小的用語。若要了解學生的日常生活是否曾經使過哪個面比較大、哪個面比較小的語言，或許老師也可以更開放一點，考慮向學生提問：「這一條毛巾的面的範圍在那裏？」「毛巾的面和黑板的面相比，你會怎麼說？」以引動學生說出二個面的比較的自發性概念。但作者反思，這樣的問法也不見得比較好，因為學生可能不知道「範圍」的意思，可能不知道老師的問法是要比什麼。因此請老師自己衡量實際教學情形再做決定。

非平面的比較需要攤開成平面

和非直線的棉線長短比較一樣，面的大小比較需要把非平面攤開成平面再來比較。老師利用防疫的議題，向學生說明「除了勤洗手以外，還要養成把手擦乾的好習慣」，她發給每一組學生一套三條有折疊過且看起來一樣大的毛巾，提問「先觀察毛巾（圖三），再拿出最小的毛巾給皮皮（玩偶）使用。請問哪一條毛巾最小？」。部份學生在觀察的過程中認為三條毛巾一樣大，也有些觀察比較敏銳的學生發現不對，了解應該先把毛巾攤開來、舖平，再來比較（圖四）。因此當老師提問：「為什麼毛巾舖平才能比較毛巾的大小呢？」學生回答：「因為有折疊，看不出哪一條比較大，無法比較」。

圖 3. 學生在觀察哪一條毛巾最小

圖 4. 學生主動展現面的比較需要攤平

生活中面的內隱知識

在日常生活中，當我們在比較兩物時，通常有它的內隱知識，例如我們說左手的蘋果比右手的蘋果大，比的是蘋果的體積；我們說 A3 的紙比 A4 的紙大，比的是紙的面積；我們說左手的花片比右手的花片多，比的是花片的數量。

為了引出學生了解生活中的內隱知識，老師給各組一套大、中、小的退熱貼，然後提問：「皮皮感冒發燒了，不能上學而要在家休息。皮皮要用『中號』的退熱貼，媽媽應該選哪一個退熱貼？」

當學生拿出中號的退熱貼後，老師提問「中號退熱貼指是什麼呢？」目的在讓學生了解，當我們講中號的退熱貼指的是退熱貼的面是第二大的。

透過疊合進行面的直接比較

老師說明班上要寫防疫宣導短語來進行教室布置，再拿出兩張紙貼在黑板上，一張縱長橫短、另一張縱短橫長（圖五），提問「哪一張紙的面比較大？」再每一組發下二張和黑板上同樣大的紙，引動學生旋轉紙張再進行疊合的自發性概念，並請學生留意「你是怎麼比的？」。之後再請學生上台說明他的比較方法，並詢問學生「比較的方法和他一樣的，舉手」，「有誰和他不一樣的？」目的在讓學生發現要直接比較兩個面的大小時，除了可能要旋轉之外，還要留意二種比較的方法。也就是因為（1）紅色紙完全在黃色紙內（紅色紙的四個邊都在黃色紙的內部），（2）紅色紙的一個邊或者相鄰二個邊（一個角）和黃色紙對齊，紅色紙的其他邊（或者其他的角）在黃色裏面，所以黃色紙的面比較大。

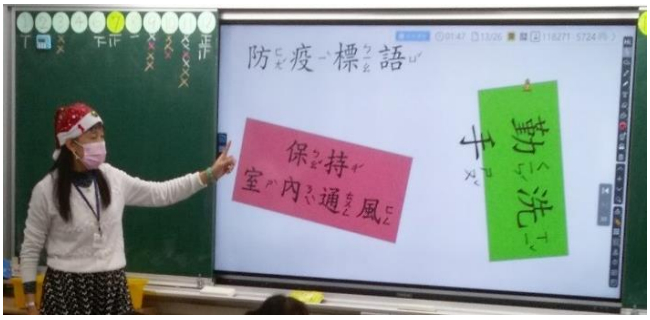

圖 5. 老師將二張紙擺放不同方式以進行面的直接比較

老師這樣教的目的是要讓學生能對比長度的大小比較方法，因為長度的大小比較可以是第一物的兩端都在第二物之內，或者第一物和第二物的一端疊合，第一物的另一端在第二物之內。

教科書時常使用長方形紙張讓學生進行面的直接比較。為了拓展學生面的直接比較不一定要是長方形，老師說明快要過新年了，小朋友要寫卡片寄給「防疫英雄」，感謝防疫英雄的辛苦付出。再發給每位學生一張圓形卡片、一張愛心圖形卡片和一個信封，向學生提問：「圓形卡片和愛心卡片都可以裝進長方形信封裡嗎？」由於愛心卡片需旋轉 90 度才能放進信封內，有一位學生認為當愛心卡片沒有旋轉就放入信封時，因為放不進去所以信封沒有比愛心卡片大（圖六）；當它旋轉 90 度後就可以放入，愛心卡片才比信封小。事後的議課，大家認為這一位學生可能不具備面的守恒概念。可惜因為時間和教師即時反思能力的限制，老師並沒有在這裏讓學生好好討論「怎麼會不旋轉愛心卡片時，愛心卡片比信封大，旋轉以後愛心卡片比信封大？我們剛才在比兩張長方形紙張時，是怎麼知道哪一張比較大？」

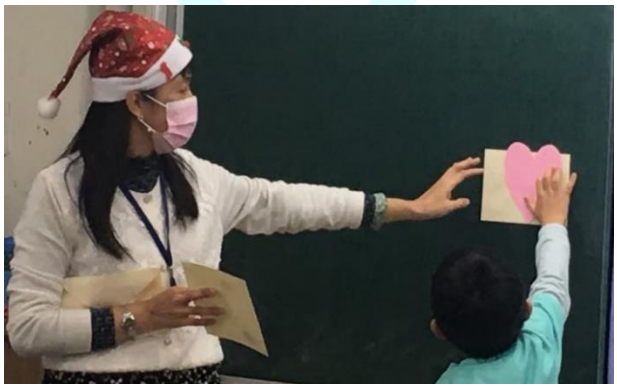

圖 6. 學生認為愛心沒有比信封小

整合先前概念的綜合活動

在統整活動時，老師提問：「想一想今天學到什麼？」目的要學生回想學習的概念和方法。也就是「什麼是平面、曲面」，「面有多大的意思是什麼」，以及「面的大小比

較」。「在進行面的比較時，假如是摺疊起來的面，要打開成平面再來比，和棉線長度比較一樣要拉直再比（圖七）」，「直接進行面的大小比較時，和比長度一樣，一個面的四個邊完全在裏面，或者可以一、二個邊對齊、其他的邊都在裏面的面比較小」。

圖 7. 面的比較連結長度的比較

同時，老師也統整不同物件的比較時，所使用的用語可能不同。老師提問：「還記得嗎？以前（1）長度的比較是用什麼來說的（語言）？」引出學生回想是使用長短、高矮、胖瘦的用語。「(2) 像蘋果的個數是用什麼來說的（語言）？」是使用多少的用語。「(3) 數字的比較是用什麼來說的（語言）？（圖八）」是使用大小的用語。「(4) 面的比較呢？ 」是使用大小的用語。

圖 8. 連結不同物件的比較用語

結語

因為學生的具體操作會花很長的時間，同時學生的秩序不容易掌握。因此教學過程中，老師很容易忘了在進行重要概念的統整時，應該將學生的注意力拉回來，因此上述的重要概念有時候無法讓所有學生清楚的了解，最後的課程統整也以比較快的速度帶過。

因為這是第一次將長度的比較、用語等整合在面的大小比較之中，所以有些觀察者感覺有一點跳，覺得「怎麼在教面的大小比較，怎麼出現長度的比較？」

作者認為，若我們想培養學生對所有的數學有感覺，能將所學的知識主動連結舊概念，了解不同物件（長度／面）的比較方法/用語的異同，使所學的知識形成一個完整的知識體系，老師必須提供這樣的學習機會。同時，老師在進行舊概念的連結時，可以在最後的課程統整時再進行，不一定要在新概念的建立時，即時連結舊概念。因為在建立新概念時，同時連結舊概念，很容易使低成就學生產生概念混淆。但是作者相信，在課程統整時，老師時常主動幫學生進行舊概念／學習方法的連結，相信慢慢的學生才能自己主動連結所學的舊概念／學習方法。這時候，很可能學生會在老師教新概念的過程中，主動說出和哪些舊概念／學習方法的異同，甚至主動使用舊概念的學習方法來學習新概念。這時候，學生已經開始展現帶得走的能力，能進行學習的創新。

李源順
臺北市立大學數學系教授
詹明霞
臺北市永春國小教師