Seeing Dots——高中數學的探究與實作

文／張宮明

前言

2011 年的春天，筆者開設的數學專題研究課，迎來了新的一批高一學生，同時期筆者有多組學生在做不同議題的探究，在經過許多的文獻討論課程後，筆者的學生楊宗諺與陳玟旭對於參考文獻[4]（盧崇文 2009）的研究內容產生極大的興趣。其內容為：

「將一個樂隊放在第一象限，若要從周圍外一層攝影整個隊伍，則需要幾個攝影點才能將所有人拍攝到？」

針對此問題，筆者曾指導學生盧崇文（2009），經過一年的探討與研究，獲得了豐富的成果即參考文獻[4]，筆者也將指導過程分享於去年的科學研習月刊（60 卷 2 期）。這一次，筆者的另一組學生楊宗諺與陳玟旭延續學長的研究成果更進一步探究此問題，獲得更多新的結論，在 2012 年台灣國際科學展覽會上展現豐富的成果。

在探究初始，筆者要求楊&陳將參考文獻深入研究與探討。經過幾週的研讀與討論，我們定訂了初步的研究方向：

（1）改良文獻[4]的不足之處，發展更優化的結果。

（2）探究與文獻不同限制條件下的最小拍攝點集。

我們擬定一份研究計畫申請得到青少年科學人才培育計畫的補助，並獲得屏東教育大學傅東山教授的指導，這無疑是對我們的研究增添豐富的奧援。

就此，我們開啟一連串驚喜有趣的探究過程，筆者將引述楊&陳的研究報告（2012）與讀者分享。本文介紹的圖表與定理皆取自楊&陳的研究報告，也就是參考文獻[5]（楊&陳，2012），筆者也會適當地增減與修正。特別提醒讀者，為了整篇文章的可讀性，本文也會提及參考文獻[4]中的某些定理，並且與楊&陳發展出的新結果比較其相異之處。

研究過程、方法與結果

為了讓讀者更容易理解本文內容，筆者重新將題目內容敘述如下：

將一個樂隊放在坐標平面第一象限正整數格子點上，攝影師在原點、x 軸、y 軸正整數點上拍攝，則最少需要幾個拍攝點才能將所有人都拍攝完畢？

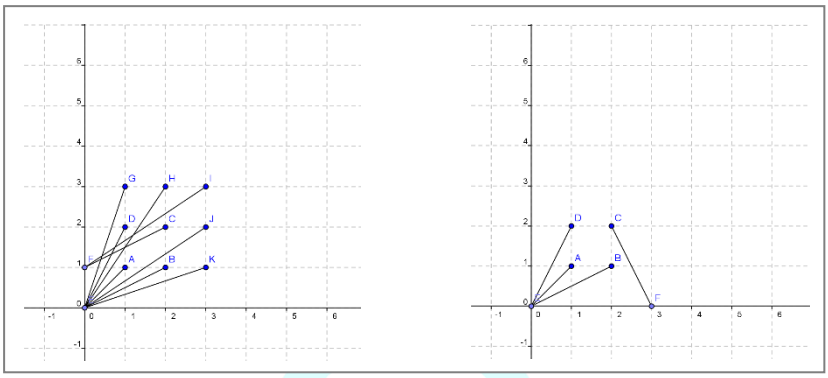

圖 1.

圖 1 是陣列 3×3（左）和 2×2（右）的拍攝情形，探究現有的參考文獻後發現：如果將攝影師的位置限制在原點與 x 軸（或 y 軸），造成所需的拍攝點較多。因此，筆者建議學生考慮攝影師的位置可以同時包含 x 軸與 y 軸上的點，深入探討上述問題。

接著，筆者指導學生將參考文獻[4]中常出現的名詞與定義做統整優化的工作，其內容如下。此部分的內容在參考文獻[4]中雖有述及，但所使用的定義與符號不夠清晰，而本文與其相異之處在於使用較有系統的文字符號來呈現。

一、優化名詞與定義

我們稱樂隊成員所在的點為**目標點**，稱攝影師所在的點為**拍攝點**。以符號 N 表示正整數所成的集合。對於 $m \in N$，以符號 $V(m)$ 表示下列目標點所成的集合

$V(m) = \{(i,j) \mid i,j \in N, 1 \le i \le m\}$，

※注意※　$V(m) \subset N \times N$ 是在第一象限內向 y 軸正向無限延伸的帶狀點集。

我們將拍攝點限制在原點及 x 軸，y 軸上的正整數點。對於拍攝點 a 與目標點 b 而言，若線段 ab 上沒有其他目標點，則稱 b 點為 a-可見(visible)。同理，對於拍攝點集 A 與目標點集 $B \subseteq V(m)$而言，若對每一點 $b \in B$ 存在一點 $a \in A$ 使得 b 點為 a-可見，則我們稱集合 B 為 A-可見。

在充分探究參考文獻[4]的結果之後，我們想要發展文獻中沒有提及的領域或更好的結論。因此，筆者建議學生考慮在下列限制條件下，建構最小拍攝點集 S，使得目標點集 $V(m)$為 S-可見的問題。

限制 x 軸上拍攝點落在集合$\{(i, 0) \mid 0 \le i \le m+1\}$範圍內，拍攝點集 S 包含原點，並允許 y 軸上的正整數點。

若目標點集增加第二、三、四象限的帶狀點集，則最小拍攝點數與（一）之間關係為何？

將拍攝點集 S 限制在直線 $y = x$ 上的正整數格子點，並允許 y 軸上的正整數點。

對於合作的團隊學生必須藉由互相討論與分工合作彼此磨合，指導老師需觀察團隊成員中的合作關係並給予適當的鼓勵與調整。楊&陳是相處多年的同學，彼此的合作非常有默契。在研究的初期就帶來先前文獻中沒有提到的新發現，其初步結果概述如下：

若以 a_n 表示在原點拍攝 n×n 陣列時，所看不到的點的個數則 a_n 滿足下列遞迴關係式：

$$a_1 = 0，a_{n+1} = a_n + 2(n - \phi(n)) - 1 \ (n \in \mathrm{N})，其中 \phi(n) 為尤拉函數。$$

表 1 列出 n=1 到 10 的情形，詳細的證明會在後續的內容中提及。

表 1.

項目 n×n	拍攝點(0,0)　看不到點的個數 a_n	算式
1×1	0	—
2×2	1	0+2×1-1=1
3×3	2	1+2×2-1=2
4×4	5	2+2×2-1=5
5×5	6	5+2×1-1=6
6×6	13	6+2×4-1=13
7×7	14	13+2×1-1=14
8×8	21	14+2×4-1=21
9×9	26	21+2×3-1=26
10×10	37	26+2×6-1=37

這個觀察結果雖然只是一個小小的新發現，但卻是新苗長出來的重要時刻，因此，筆者以非常讚賞的態度鼓勵楊&陳，希望他們更進一步勇往直前探索未知。受到指導老師激勵的楊&陳更能感受發現新事物的喜悅與樂趣，因此更加熱情地探究此問題，研究就此順利展開。

二、基本性質

接下來，我們審視參考文獻[4]所列的基本性質(定理 1、2，引理 1、2)，發現其不夠完備，經過重新論證之後，得到下列更優化的結果(引理 1、2、3)。

將整個樂隊隊伍搬至坐標平面第一象限上拍攝，以數學的定義描述如下：

對於正整數 m 而言，考慮目標點集 $V(m)=\{(i, j) \mid i, j\in N, 1\le i \le m\}$，以符號 X^+, Y^+ 分別表示 x 軸，y 軸上的正整數點所成的集合，即

$X^+=\{(i, 0) \mid i\in N\}$

$Y^+=\{(0, j) \mid j\in N\}$

建構滿足下列條件的最小拍攝點集 S 使得 $V(m)$為 S-可見。

(1) $S\cap X^+= \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \ldots, (m+1, 0)\}$,

(2) $(0, 0)\in S$,

(3)允許 S 包含部份 y 軸上的正整數點。

另外，假設攝影機並無拍攝角度之限制。

仔細觀察這些看不到點的現象，發現有下列基本性質(引理 1 至 3)：

引理 1. 以原點(0,0)為拍攝點，觀察目標點 C(x, y)，則 C 點為(0, 0)-可見若且唯若 gcd(x, y)=1。

證明

設 gcd(x, y) = d，$x = ad$，$y = bd$，則 $a, b\in N$。令點 $A = (0, 0)$，點 $B =(a, b)$，則

AB 直線的斜率為 $\dfrac{b-0}{a-0} = \dfrac{b}{a}$

AC 直線的斜率為 $\dfrac{y-0}{x-0} = \dfrac{bd}{ad} = \dfrac{b}{a}$

所以線段 AB 的斜率等於線段 AC 的斜率，故兩直線重疊，若 $d = 1$ 即 $B = C$，此時 C 點為(0, 0)-可見。若 $d > 1$，則 B 點在線段 AC 之上，此時 C 點不是(0, 0)-可見。

上述這些被其他點擋住而不能從原點看到的點或可稱為非原點可見。觀察這些點，由引理 1，不難發現下列現象：

直線 $x = 2$ 上非原點可見的點為$\{(2, 2n) \mid n \in N\}$

直線 $x = 3$ 上非原點可見的點為$\{(3, 3n) \mid n \in N\}$

直線 $x = 6$ 上非原點可見的點為$\{(6, 2n) \mid n \in N\} \cup \{(6, 3n) \mid n \in N\}$。

依據以上觀察，考慮將拍攝點從原點移到 x 軸（或 y 軸）上的正整數點，得出以下性質。

引理 2. 設 k, m 為正整數，

(1) 以點$(k, 0)$為拍攝點，觀察直線 $x = m$ 上的目標點 $C(m, y)$，則 C 點是$(k, 0)$-可見若且唯若

$\gcd(m-k, y) = 1$，

(2) 以點$(0, k)$為拍攝點，觀察直線 $y = m$ 上的目標點 $C(x, m)$，則 C 點是$(0, k)$-可見若且唯若

$\gcd(x, m-k) = 1$。

證明

(1) 經過平移，以$(k, 0)$為新原點，則 C 點的新坐標為$(m-k, \mathrm{y})$。由引理 1 得知 C 點是$(k, 0)$-可見若且唯若 $\gcd(m-k, y) = 1$。

(2) 同理可證。

例如，如圖 2 所示，直線 $x = 2$ 上非原點可見的目標點$(2, 2n)$, $n \in N$ 與直線 $x = 3$ 上非原點可見的目標點$(3, 3n)$, $n \in N$ 可以利用 y 軸上的拍攝點$(0, 5)$去看。

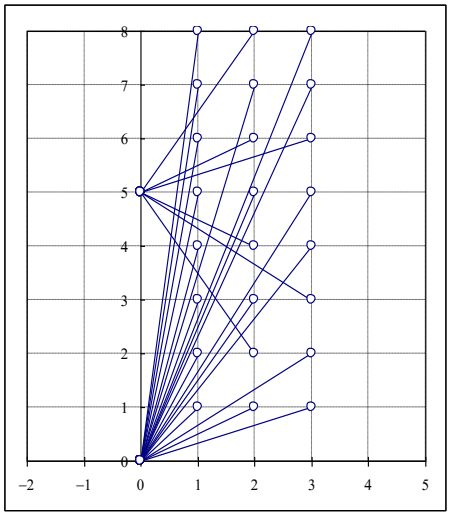

圖 2. 由拍攝點(0, 0),(0, 5)去看目標點集 $V(3)$

以下性質經常用在說明 y 軸拍攝點$(0, r)$對目標點的可見性。

引理 3. 設 $c, r\in N$, $\gcd(c, r) = 1$，$p_1, p_2, \ldots, p_s$ 為 c 的質因數，$q = p_1\times p_2\times\ldots\times p_s$，則對任意 $n\in N$，$\gcd(c, qn-r) = 1$ 恆成立。

證明

若存在 $n_0\in N$ 使得 $\gcd(c, qn_0-r) > 1$，則存在 c 的質因數 p_i 整除 qn_0-r，又因 p_i 整除 q 所以 p_i 整除 r，但這與假設 $\gcd(c, r) = 1$ 矛盾，因此對任意 $n\in N$，$\gcd(c, qn-r) = 1$。

三、建構 m < 10 的最小拍攝點集

對於 $m < 10$ 的情形，參考文獻[4]雖然有得到一些推論(推論 1 至 9)，但是並沒有論證最少拍攝點數，楊&陳在仔細研究後得出最少拍攝點數，如下列定理 4 所述。

以符號 $|S|$ 表示集合 S 的元素個數，以符號$\sigma(m)$表示可觀看 $V(m)$全體目標點所需的最小拍攝點數，即

$$\sigma(m) = \min\{|S| : V(m)\text{為 } S\text{-可見}\}$$

由上述引理，對於 $m < 10$ 的情形可得出以下之結論。

定理 4. 設 m 為正整數，下列敘述成立。

(1) 若 $m = 1$，則$\sigma(m) = 1$。

(2) 若 $2 \le m \le 5$，則$\sigma(m) = 2$。

(3)　若 $6 \le m \le 9$，則 $\sigma(m) = 3$。

我們以各別討論的方式，試著找出最少的拍攝點。

(1) 當 $m = 1$ 時，對於 $V(1) = \{(1, n) \mid n \in N\}$而言，拍攝點僅需原點即可全部入鏡。

證明

對於 $n \in N$，$\gcd(1, n) = 1$，由引理 1 知目標點$(1, n)$均為原點可見。定理 4 敘述(1)成立。

當 $m > 1$ 時，原點不足以看到全部 $V(m)$的點，因此$\sigma(m) \ge 2$。

(2) 當 $m = 2, 3, 4, 5$ 時，對於 $V(m)$而言，拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, 7)\}$即能全部入鏡

證明

由敘述(1)知直線 $x = 1$ 上的目標點均為原點可見。考慮直線 $x = 2, 3, 4, 5$ 上那些原點看不到的點$(2, 2n), (3, 3n), (4, 2n), (5, 5n), n \in N$，這些點可從 y 軸上的拍攝點$(0, 7)$看到。理由是，若以點$(0, 7)$為新原點，這些點的新坐標分別為$(2, 2n-7), (3, 3n-7), (4, 2n-7), (5, 5n-7)$。由引理 3 知 $\gcd(2, 2n-7) = \gcd(3, 3n-7) = \gcd(4, 2n-7) = \gcd(5, 5n-7) = 1$，由引理 2 之(2)得知這些點均為$(0, 7)$-可見。以上證明了定理 4 之敘述(2)。

(3) 當 $m > 5$ 時，包含原點的拍攝點數至少為 3，即$\sigma(m) \ge 3$。

證明

考慮直線 $x = 6$ 上非原點可見的目標點$(6, 2n), (6, 3n)$，對於任意整數 r 都存在 $n_1 \in N$（或 $n_2 \in N$）存使得 3 整除 $2n_1 - r$（或 2 整除 $3n_2 - 7$），因此對於 y 軸上任意拍攝點$(0, r)$，都存在直線 $x = 6$ 上非原點可見的目標點$(6, 2n_1)$（或 $(6, 3n_2)$）為非$(0, r)$-可見。

很明顯，對於 x 軸上的一拍攝點$(i, 0)$，$i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，不足以看到全部 $V(6)$的非原點可見的目標點。

(4) 當 $m = 6, 7, 8, 9$ 時，對於 $V(6)$而言，拍攝點集 $S = \{(0, 0), (7, 0), (0, 11)\}$即能全部入鏡。

證明

考慮非原點可見且非(7, 0)-可見的目標點(2, 10n), (3, 6n), (4, 6n), (5, 10n), $n\in N$。這些點將可從 y 軸上的拍攝點(0, 11)看到。理由是，若以點(0, 11)為新原點，這些點的新座標分別為(2, 10n−11), (3, 6n−11), (4, 6n−11), (5, 10n−11)。由引理 3 知 gcd(2, 10n−11) = gcd(3, 6n−11) = gcd(4, 6n−11) = gcd(5, 10n−11) = 1，由引理 2 之(2)得知這些點均為(0, 11)-可見，故 $V(6)$為 S-可見。

考慮直線 $x = 7, 8, 9$ 上的目標點，很明顯，那些非原點可見的點均為(0,11)-可見。

以上證明了定理 4 之敘述(3)。

※附註※ 上述 V(m)的最小拍攝點集不是唯一的，例如，對於 V(m), m = 6, 7, 8, 9, 的拍攝點集 S 也可以取 S = {(0, 0), (5, 0), (0, 11)}。

四、建構 $m \geq 10$ 的最小拍攝點集

當 $m \geq 10$ 時，*我們*以參考文獻[4]的定理 3 為基礎，並加以改良，提出**覆蓋點集**的新概念，對於目標點集 $V(m)$我們提出一個完整建構拍攝點集 S 的方法即本文中的定理 5，並且證明之。這個方法的步驟有些複雜，其內容如下所述，請讀者有耐心地閱讀。

將目標點依其所在的直線 $x = c$ 加以分類，我們將集合$\{1, 2, ..., m\}$分割成三個子集

$\{1, 2, ..., m\} = \{1\}\cup U_m\cup W_m$，

其中 U_m 是那些質數冪所成的集合，而 W_m 是那些剩下的數所成的集合，換言之

$U_m = \{c\in N \mid c \leq m, c$ 只有 1 個質因數$\}$，

$W_m = \{c\in N \mid c \leq m, c$ 有 2 個或 2 個以上質因數$\}$。

例如，當 $m = 10$ 時，$U_{10} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $W_{10} = \{6, 10\}$，當 $m = 15$ 時 $U_{15} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}$, $W_{15} = \{6, 10, 12, 14, 15\}$。

若 $|W_m| = r$，令 $W_m = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$。對於 $1 \leq i \leq r$，設 w_i 有 $s(i)$個質因數，並令這些質因數為$\{p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{i,s(i)}\}$，考慮 w_i 所衍生型如 $w_i \pm p_{ij}^k$ 的正整數類型，定義集合 $f(w_i)$如下，其中 k 為任意非負整數

$f(w_i) = \{ w_i \pm p_{ij}^k \mid 1 \leq j \leq s(i)\}$，

並定義 $F(m)$為所有這些類型所成的集合，即

$F(m) = f(w_1) \cup f(w_2) \cup \ldots \cup f(w_r)$。

若正整數 t 可以表示成 $w_i \pm p_{ij}^k$ 的形式，則稱 t 涵蓋 $w_i \pm p_{ij}^k$ 類型。考慮正整數集 $T \subset \{1, \ldots, m+1\}$，若對每一類型 $w_i \pm p_{ij}^k \in F(m)$，存在 $t \in T$ 使得 t 涵蓋 $w_i \pm p_{ij}^k$ 類型，則稱 T 為 $F(m)$-**覆蓋**。我們的目的就是利用 $F(m)$-覆蓋建構 x 軸上的拍攝點集。

例如，當 $m = 10$ 時，$W_{10} = \{6, 10\}$，其中 6 的質因數為$\{2, 3\}$，10 的質因數為$\{2, 5\}$，則 6 與 10 分別衍生正整數類型 $f(6)=\{6\pm2^k, 6\pm3^k\}$，$f(10)=\{10\pm2^k, 10\pm5^k\}$，因此

$F(10) = \{6\pm2^k, 6\pm3^k, 10\pm2^k, 10\pm5^k\}$。

當 $k = 0$ 時，$6\pm2^k = \{7, 5\}$, $6\pm3^k = \{7, 5\}$, $10\pm2^k = \{11, 9\}$, $10\pm5^k = \{11, 9\}$，知 7 與 5 涵蓋 6 ± 2^k 類型與 6 ± 3^k 類型，11 與 9 涵蓋 10 ± 2^k 與 10 ± 5^k 類型，因此構成 $F(10)$-覆蓋的集合 T 有$\{5, 9\}$, $\{5, 11\}$, $\{7, 9\}$, $\{7, 11\}$；當 $k = 1$ 時，$6\pm2^k = \{8, 4\}$, $6\pm3^k = \{9, 3\}$, $10\pm2^k = \{12, 8\}$ （因 $12 > m+1=11$，可以捨去）, $10\pm5^k = \{15, 5\}$（因 $15 > m+1=1$，可以捨去），知 8 涵蓋 6 ± 2^k 類型與 10 ± 2^k 類型，依此類推；當 $k = 2$ 時，$6\pm2^k = \{10, 2\}$, $10\pm2^k = \{14, 6\}$。我們將結果整理成下表 2，以利說明：

表 2.

	6 ± 2^K	6 ± 3^K	10 ± 2^K	10 ± 5^K
當 $K = 0$	7, 5	7, 5	11, 9	11, 9
當 $K = 1$	8, 4	9, 3	8	5
當 $K = 2$	10, 2	超出範圍	6	超出範圍

由表得知，構成 $F(10)$-覆蓋的集合 T 有$\{5, 9\}$, $\{5, 11\}$, $\{7, 9\}$, $\{7, 11\}$, $\{5, 8\}$, $\{8, 9\}$, $\{3,9,11\}$, …,等，但$\{7, 8\}$不是一個 $F(10)$-覆蓋，因為 10 ± 5^k 類型不能被 7 與 8 所涵蓋。

注意，對於 $m \geq 10$，任何一個 $F(m)$-覆蓋 T 至少包含 2 個元素。

以下，對於目標點集 $V(m)$，我們利用 $F(m)$-覆蓋建構拍攝點集 S 使得 $V(m)$為 S-可見。

定理 5. 設正整數 $m \geq 10$，$T \subset \{1, \ldots, m+1\}$為一個 $F(m)$-覆蓋，r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(m) = \{(i, j) \mid i, j \in N, 1 \leq j \leq m\}$，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0),$

$(0, r)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in T\}$，則 $V(m)$為 S-可見。

證明

為了證明 $V(m)$為 S-可見，我們將目標點依其所在的直線 $x = c$ 分類，因此將集合 $\{1, 2, ..., m\}$分割成上述三個子集$\{1\}$, U_m, W_m，分別討論如下：

(1) 當 $c = 1$ 時，很明顯，直線 $x = 1$ 上所有目標點均為原點可見。

(2) 當 $c \in U_m$時，c 只有 1 個質因數 p，考慮直線 $x = c$ 上那些非原點可見的目標點(c, pn), $n \in N$，由引理 3 知對於任意 $n \in N$, $\gcd(c, pn-r) = \gcd(c, r) = 1$，因此由引理 2 之(2)得知這些目標點
(c, pn)都可被 y 軸上的拍攝點$(0, r)$所看見。

(3) 當 $c \in W_m$時，c 有 2 個或 2 個以上質因數，令這些質因數為$\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$。因 T 是一個 $F(m)$-覆蓋，故存在 $t_1, t_2, \ldots, t_s \in T$ 使得 t_i 涵蓋 $c \pm p_i^k$ 類型 $(1 \le i \le s)$。

對於相異的 $i, j \in \{1, 2, ..., s\}$，存在 $a, b \in N$ 使得 $t_i = c \pm p_i^a$，$t_j = c \pm p_j^b$。由引理 3 知對於任意 $n \in N$，當 n 不是 p_j 的倍數時，$\gcd(t_j - c, p_i n) = \gcd(\pm p_j^b, p_i n) = 1$。同樣的，當 n 不是 p_i 的倍數時，$\gcd(t_i - c, p_j n) = \gcd(\pm p_i^a, p_j n) = 1$。

考慮直線 $x = c$ 上那些非原點可見的目標點$(c, p_1 n)$, $(c, p_2 n)$, …, $(c, p_s n)$, $n \in N$，拍攝點$(t_j, 0) \in S$ 可看見目標點$\{(c, p_i n) \mid n \in N$，$n$ 不是 p_j 的倍數$\}$，但看不見目標點$\{(c, p_i n) \mid n \in N$，$n$ 是 p_j 的倍數$\}$。同樣的，拍攝點$(t_i, 0) \in S$ 可看見目標點$\{(c, p_j n) \mid n \in N$，$n$ 不是 p_i 的倍數$\}$，但看不見目標點$\{(c, p_j n) \mid n \in N$，$n$ 是 p_i 的倍數$\}$。令 $q = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_s$，則直線 $x = c$ 上只剩下目標點(c, qn), $n \in N$ 不能被拍攝點$\{(t_1, 0), (t_2, 0), \ldots, (t_s, 0)\}$所看見，而這些目標點$(c, qn)$ 可被 y 軸上的拍攝點$(0, r)$所看見，理由是 $\gcd(c, qn-r) = \gcd(c, r) = 1$，因此我們證明了 $V(m)$為 S-可見。

例如，當 $m = 10$ 時，$U_{10} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $W_{10} = \{6, 10\}$，$F(10) = \{6 \pm 2^k, 6 \pm 3^k, 10 \pm 2^k, 10 \pm 5^k\}$。對於目標點集 $V(10)$建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, 11), (7, 0), (9, 0)\}$使得 $V(10)$為 S-可見，茲說明如下。

考慮直線 $x = c$ 上的目標點，當 $c = 1$ 時，顯然直線 $x = 1$ 上的目標點均為原點可見。

當 $c \in U_{10}$時，非原點可見的的目標點有$(2, 2n)$, $(3, 3n)$, $(4, 2n)$, $(5, 5n)$, $(7, 7n)$, $(8, 2n)$, $(9, 3n)$, $n \quad N$，這些點都是$(0, 11)$-可見。

當 $c \in W_{10}$時，非原點可見的的目標點有$(6, 2n)$, $(6, 3n)$, $(10, 2n)$, $(10, 5n)$, $n \in N$。

若取 $F(10)$-覆蓋 $T = \{7, 9\}$知拍攝點(7, 0)可看見直線 $x = 6$ 上的目標點，拍攝點(9, 0)可看見直線 $x = 10$ 上的目標點，因此建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (7, 0), (9, 0), (0, 11)\}$可使 $V(10)$為 S-可見。

若取 $F(10)$-覆蓋 $T = \{5, 8\}$知直線 $x = 6$ 上的目標點可被拍攝點(5, 0)可看見，但直線 $x = 10$ 上的部份目標點$(10, 10n)$, $n \in N$ 被不能被拍攝點(5, 0)及(8, 0)可看見，而這些點均為(0, 11)-可見，因此建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (5, 0), (8, 0), (0, 11)\}$亦可使 $V(10)$為 S-可見。

由定理 5，要建構 $V(m)$的最小拍攝點集 S 就要搜尋最小的 $F(m)$-覆蓋，以符號 $\kappa(m)$表示最小 $F(m)$-覆蓋的點數，即

$\kappa(m) = \min\{|T| : T$ 為 $F(m)$-覆蓋$\}$，

則我們有以下結果。

定理 6. 若 m 為正整數，則$\sigma(m) \le \kappa(m) + 2$。

此結果與參考文獻[4]中定理 5 的結果不同之處在於我們指出最少拍攝點數的上界，並且繼續推演出新的發展如下。

在研究過程中發現我們觀察到一個現象，當 m 為質數時，$V(m)$與 $V(m-1)$所需的拍攝點個數相同，經過思考之後知道，因為 m 是質數，不會產生新的類型，換言之 $F(m) = F(m-1)$，我們得出下列推論。

推論 7. 若 m 為質數，則 $\kappa(m) = \kappa(m - 1)$。

當數字 m 越大時，構成 $F(m)$-覆蓋的集合也越多，此時需要數學軟體輔助加以運算。下列表 3 是我們目前找出來最小覆蓋的點數：

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\kappa(m)$								1							2						3			4				5		

m	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\kappa(m)$		5	6					8								9					10					11			12	14

我們試著使用迴歸直線去預測接下來的最小覆蓋的點數$\kappa(m)$，以 $1 \leqq m \leqq 100$ 計算資料得出迴歸直線為

$\kappa(m) = (2028585m + 2906864)/8329699$

其相關係數為 0.994141。

因為在參考文獻[4]的定理 6 有提及 π 函數與拍攝點數的關係，所以筆者請楊&陳研究他們的相關性，並獲得新的進展如下猜想 8。

下列圖 3 為$\kappa(m)$與 π 函數的對照圖，其中 π 函數定義 $\pi(m)$為小於或等於 m 的質數個數。經過觀察，我們發現$\kappa(m)$與 $\pi(m)$函數有高度相關性，至於他們之間的關係為何？目前尚無確定的結論。

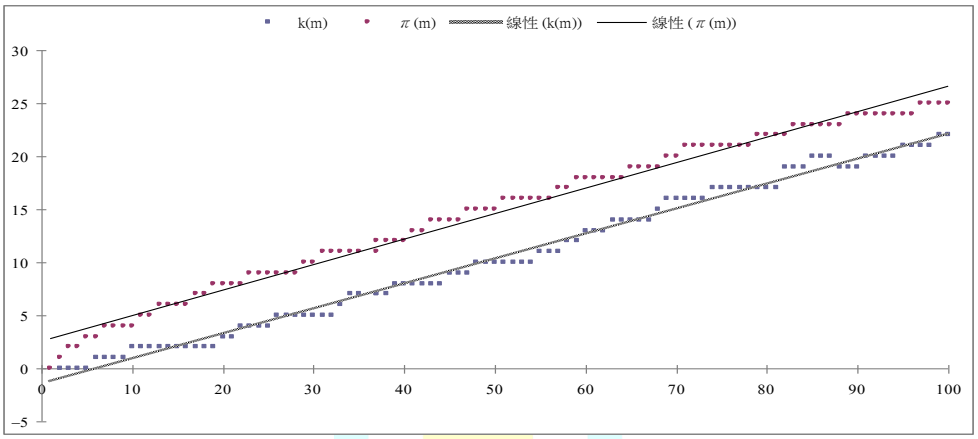

圖 3. $\kappa(m)$與 π 函數的對照圖

猜想 8. 若 m 為正整數，則 $\kappa(m) + 2 \le \pi(m)$ 。

與先前文獻之結果比較，參考文獻[4]探討對於目標點集 $V(m)$，拍攝點限制在 x 軸上點集合$\{(i, 0) \mid 1 \le i \le m + 1\}$，建構 $V(m)$-可見的最小拍攝點集 S，得到結論是當 m 是 4 的倍數時，$|S| = m/2$，當 m 不是 4 的倍數時，$|S| = [m/2] + 1$，其中符號$[x]$表示高斯函數。

$$f(m) = \begin{cases} m/2 & m \text{ 是 4 的倍數} \\ [m/2] + 1 & m \text{ 不是 4 的倍數} \end{cases}$$

如下圖 4，將這個函數與我們所做（允許 y 軸上拍攝點）的結果$\kappa(m) + 2$ 比較，我們發現所需的拍攝點數大幅降低。

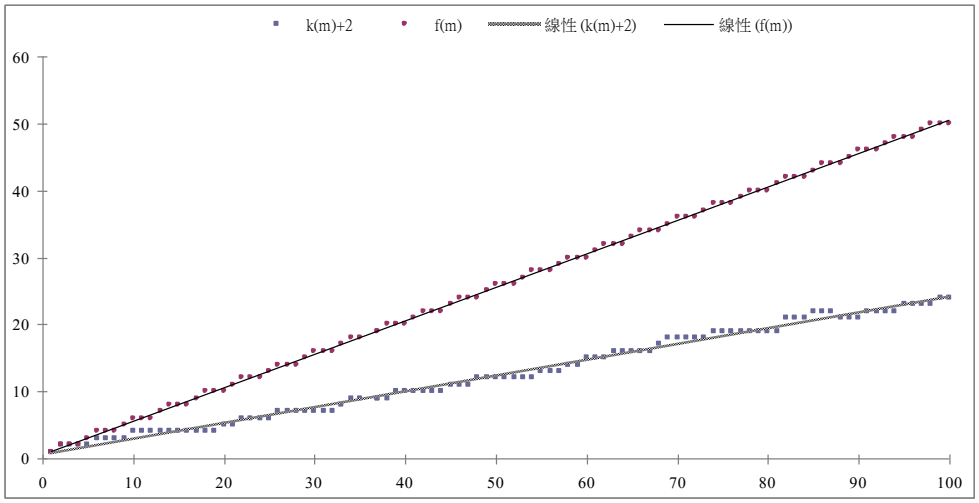

圖 4. $\kappa(m)+2$ 與 $f(m)$對照圖

我們在研究過程中，我們曾考慮以原點為拍攝點，目標點集為 $m\times m$ 方陣

$M(m)=\{(i,j)\mid i,j\in N,\ 1\le i,j\le m\}$，

我們發現一個有趣特殊性質，以 a_m 表示 $M(m)$中原點所看不到的目標點個數，下表 4 列出我們觀察到 a_m 的初始值$(1\le m\le 10)$

表 4.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_m	0	1	2	5	6	13	14	21	26	37

我們得到以下結果。

定理 9. 以下等式成立，其中符號 $\phi(x)$ 表示尤拉函數，

$$a_m=m^2-1-2\sum_{k=1}^{m}\phi(k)$$

證明

比較 $M(k)$與 $M(k-1)$，目標點多出 $2k-1$ 個點，分布在直線 $x=k$ 上與直線 $y=k$ 上，其中原點可見的目標點在直線 $x=k$ 上有 $\phi(k)$ 個，在直線 $y=k$ 上有 $\phi(k)$ 個，因此數列 a_k 滿足遞迴關係式

$$\begin{cases} a_1=0 \\ a_k=a_{k-1}+2k-1-2\phi(k) \end{cases}$$

上述等式做 $a_1+a_2+\ldots+a_m$ ，即可得證。

另外，考慮以點(1, 1)∈$M(m)$為拍攝點，b_m 表示 $M(m)$中(1, 1)點所看不到的目標點個數（包含(1, 1)點本身），有以下結果。

定理 10. 以下等式成立，$b_1 = 1$，當 $m \geq 2$ 時，

$$b_m = m^2 - 3 - 2\sum_{k=1}^{m-1}\phi(k)$$

證明

目標點 M(m)可分成直線 x =1，直線 y = 1，與(m−1)×(m−1)方陣，其中在直線 x = 1，y = 1 上分別有 m−2 個(1, 1)點所看不到的目標點，加上(1, 1)點本身，共 2m−3 個點。以(1, 1)點去看這個(m−1)×(m−1)方陣相當於以原點去看 M(m−1)，有 am−1 看不到的目標點，因此，bm = 2m − 3 + am−1，由定理 9，將 am−1 代入得證。

承上，很明顯，若將拍攝點移到其他三個角落的點$(m, 1), (1, m), (m, m) \in M(m)$，則會有相同點數 b_m 看不到的目標點。

五、建構四個象限目標點集的最小拍攝點集

以下我們考慮增加第四象限的目標點，以符號 $A(m)$表示下列目標點所成的集合

$A(m) = V(m) \cup \{(i, -j) \mid i, j \in N, 1 \leq j \leq m\}$，

拍攝點仍限制在原點及 x 軸，y 軸上的正整數點。我們發現雖然目標點增為加一倍，但所需的點拍攝點並未增加，即只需　$(m) + 2$ 個拍攝點就可將 $A(m)$全部入鏡，我們得到以下定理：

定理 11. 設 m 為正整數，T ⊂ {1, …, m+1}為一個 F(m)-覆蓋，r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 A(m) = {(i, j), (i, −j) | i, j∈N, 1≤ j ≤ m}，建構拍攝點集 S = {(0, 0), (0, r)} ∪ {(t, 0) | t∈T}，則 A(m)為 S-可見。

證明

設 T 是一個 $F(m)$-覆蓋，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) \mid t \in T\}$，則 $V(m)$ 是 S-可見，對於直線 $x = c$ 上的目標點，若目標點$(c, j) \in V(m)$可被 x 軸上的拍攝點$(t, 0) \in S$ 看見，則 $\gcd(c-t, j) = 1 = \gcd(c-t, -j)$，因此目標點$(c, -j) \in A(m)$也可被拍攝點$(t, 0)$看見。至於那些不能被 x 軸上拍攝點看到的點$(c, qn), n \in N$，其中 q 為 c 的質因數乘積，則由 y 軸上的拍攝點$(0, r)$ 負責去看，因 $\gcd(c, qn-r) = 1 = \gcd(c,$

$-qn-r), n\in N$，因此目標點$(c, -qn) \in A(m)$也可被拍攝點$(0, r)$看見，故 $A(m)$也 S-可見。

下圖 5 為利用拍攝點{(0, 0), (0, 5)}去看目標點 $A(3)$。

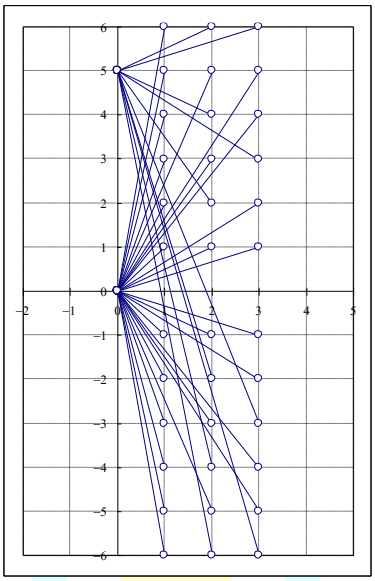

圖 5. 由拍攝點(0, 0),(0, 5)去看目標點集 A(3)

考慮將目標點 $A(m)$沿著 y 軸翻轉以增加第二及第三象限的目標點，以符號 $B(m)$表示下列目標點所成的集合

$B(m) = \{(-i, j) \mid (i, j)\in A(m)\}$，

拍攝點仍限制在原點及 x 軸，y 軸上的正整數點，我們得到以下定理：

定理 12. 設 m 為正整數，對於目標點集 $A(m) \cup B(m)$的最小拍攝點數$\sigma(m)$，有

$$\sigma(m) \le \min\{2\kappa(m) + 2,\ \kappa(2m+1) + 2\}。$$

證明

設 T 是一個 $F(m)$-覆蓋，建構拍攝點集 $S=\{(0, 0), (0, r)\} \cup\{(t, 0) \mid t\in T\}\cup\{(-t, 0) \mid t\in T\}$，由定理 10 知，目標點集 $A(m)$可被拍攝點$\{(0, 0), (0, r)\} \cup\{(t, 0) \mid t\in T\}$所看見，而目標點集 $B(m)$可被拍攝點$\{(0, 0), (0, r)\} \cup\{(-t, 0) \mid t\in T\}$所看見，所以 $A(m) \cup B(m)$是 S-可見，因此$\sigma(m) \le 2\kappa(m) + 2$。另外，考慮將 y 軸平移到直線 $x = -m -1$ 上，相當於整個目標點落在 $A(2m+1)$之內，而 x 軸上所需的攝點集可以由 $F(2m+1)$-覆蓋建構得到，因此$\sigma(m) \le \kappa(2m+1) + 2$。

建構在直線 $y = x$ 及 y 軸上的最小拍攝點集

我們又回到第一象限的目標點集 $V(m)$，這次變更拍攝點的限制，拍攝點限制在原點，直線 $y = x$ 上正整數點及 y 軸上正整數點，其結果如下：

定理 13. 設 m 為正整數，$T \subset \{1, \ldots, m+1\}$為一個 $F(m)$-覆蓋，r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(m) = \{(i, j) \mid i, j \in N, 1 \le j \le m\}$，建構拍攝點集 $S = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, t) \mid t \in T\}$，則 $V(m)$為 S-可見。

證明

將目標點依其所在的直線 $x = c$ 分類，因此將集合$\{1, 2, ..., m\}$分割成上述三個子集$\{1\}, U_m, W_m$，由定理 5 的證明知，當 $c = 1$ 或 $c \in U_m$時，直線 $x = c$ 上所有目標點都可被$\{(0, 0), (0, r)\}$所看見，現在討論 $c \in W_m$時的情形如下：

令 $p_1, p_2, \ldots, p_s$ 為 c 的質因數($s \ge 2$)。因 T 是一個 $F(m)$-覆蓋，故存在 $t_1, t_2, \ldots, t_s \in T$ 使得 t_i 涵蓋 $c \pm p_i^k$ 類型 $(1 <= i <= s)$。對於相異的 $i, j \in \{1, 2, ..., s\}$，存在 $a, b \in N$ 使得 $t_i = c \pm p_i^a$，$t_j = c \pm p_j^b$。由引理 3 知對於任意 n　N，當 n 不是 p_j 的倍數時，$\gcd(t_j - c, t_j - p_i n) = \gcd(\pm p_j^b, c \pm p_j^b - p_i n) = 1$。同樣的，當 n 不是 p_i 的倍數時，$\gcd(t_i - c, t_i - p_j n) = \gcd(\pm p_i^a, c \pm p_i^a - p_j n) = 1$。

考慮直線 $x = c$ 上那些非原點可見的目標點$(c, p_1 n), (c, p_2 n), \ldots, (c, p_s n), n \in N$，拍攝點$(t_j, t_j) \in S$ 可看見目標點$\{(c, p_i n) \mid n \in N$，$n$ 不是 p_j 的倍數$\}$，但看不見目標點$\{(c, p_i n) \mid n \in N$，$n$ 是 p_j 的倍數$\}$。同樣的，拍攝點$(t_i, t_i) \in S$ 可看見目標點$\{(c, p_j n) \mid n \in N$，$n$ 不是 p_i 的倍數$\}$，但看不見目標點$\{(c, p_j n) \mid n \in N$，$n$ 是 p_i 的倍數$\}$。令 $q = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_s$，則直線 $x = c$ 上只剩下目標點$(c, qn), n \in N$ 不能被拍攝點$\{(t_1, t_1), (t_2, t_2), \ldots, (t_s, t_s)\}$所看見，而這些目標點$(c, qn)$ 可被 y 軸上的拍攝點$(0, r)$所看見，理由是 $\gcd(c, qn - r) = \gcd(c, r) = 1$，因此我們證明了 $V(m)$為 S-可見。

下圖 6 為利用拍攝點$\{(0, 0), (5, 5)\}$去看目標點 $V(3)$。

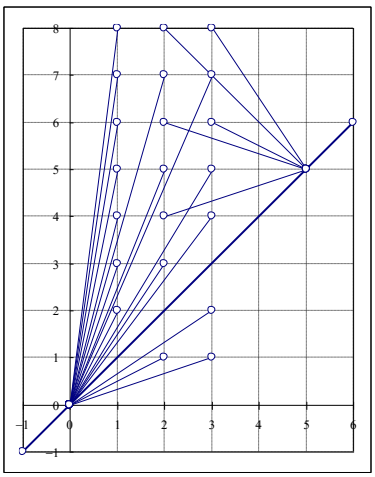

圖 6. 由拍攝點(0, 0),(5, 5)去看目標點集 V(3)

結論

在參考文獻[4]的基礎上，我們優化改良文獻的結果並發展出更多文獻中未曾提及的新結論，我們將此部分綜合整理如下。

設 m 為正整數，對於目標點集 $V(m)$，拍攝點包含原點並限制在以及 x 軸，y 軸正向的整數點上而且 x 軸上的拍攝點不可以超過$(m+1,0)$，最小拍攝點數$\sigma(m)$有下列結果：

若 $m = 1$，則$\sigma(m) = 1$。

若 $2 \le m \le 5$，則$\sigma(m) = 2$。

若 $6 \le m \le 9$，則$\sigma(m) = 3$。

若 $m \ge 10$，我們提出 $F(m)$-覆蓋的想法去建構 x 軸上的拍攝點，得到$\sigma(m)$好的上界$\kappa(m) + 2$，其中$\kappa(m)$是最小 $F(m)$-覆蓋點數，我們也認為$\kappa(m) + 2$ 不會超過 m 以內的質數個數 $\pi(m)$。

增加第四象限的目標點數不會造成最小拍攝點數增加。

若拍攝點在第一、二、三和第四象限，則只需 $2\kappa(m) + 2$ 個拍攝點。

對於目標點集 $V(m)$，拍攝點包含原點並限制在直線 $y = x$ 以及 y 軸正向的整數點上，則只需$\kappa(m) + 2$ 個拍攝點。

給讀者的展望

對於本研究還可繼續發展的部分，我們提出下列幾點供有興趣的讀者參考。

由於$\kappa(m)$是從許多$F(m)$-覆蓋中找出最小覆蓋的點數，我們嘗試找一個好的估計，例如π函數。讀者也可以就此估計做更深入的研究。

我們找觀測點方式分成許多小細節和步驟，因此我們將步驟與限制輸入電腦運作時會有書寫程式和運作上的問題。希望有興趣的讀者可以試著將它簡化或者探究另一套更快更準的找法，並利用電腦程式的幫助更快找出結果，進一步去探究拍攝點和m之間的關係。

建議讀者進一步嘗試拍攝點不限制在x軸，y軸或直線$y = x$上，而以其他點作為拍攝點，希望可以發展出拍攝點擺放在特殊的直線或曲線上，做出相關的成果。

事實上，我們可以試著推廣到三度空間，對於空間中的原點可見的目標點有類似引理 1 的性質，以原點$(0, 0, 0)$為拍攝點，觀察目標點$C(x, y, z)$，則 C 點為$(0, 0, 0)$-可見若且唯若$\gcd(x, y, z)=1$。另外，空間中的可見點仍然保有平面可見點的性質，即在平面上，原點可見的目標點(x, y)其x, y坐標互質，那麼即使到了高維度空間，只要該點的x, y坐標互質，無論其他軸向的坐標為何，該點即可被原點看到。然而，在空間中拍攝點集的選取可能有更多變化的選項，有興趣的讀者可以進一步深入探究。

張宮明

國立屏東高級中學數學科教師

參考文獻

[1] Adhikari, S. D. & Chen, Y.-G. (2002). On a question regarding visibility of lattice points III. *Discrete Mathematics*, 259, 251- 256.

[2] Adhikari, S. D. & Granville, A. (2009). Visibility in the plane. *Journal of Number Theory*, 129, 2335-2345.

[3] Laison, J. & Schick, M. (2007). Seeing Dots: Visibility of Latice Points. *Mathematic Magazine*, 80(4), 274-282.

[4] 盧崇文(2009). Visibility of Lattice Points. Taiwan International Science Fair.

[5] 楊宗諺、陳玟旭(2012). Seeing Dots. Taiwan International Science Fair.