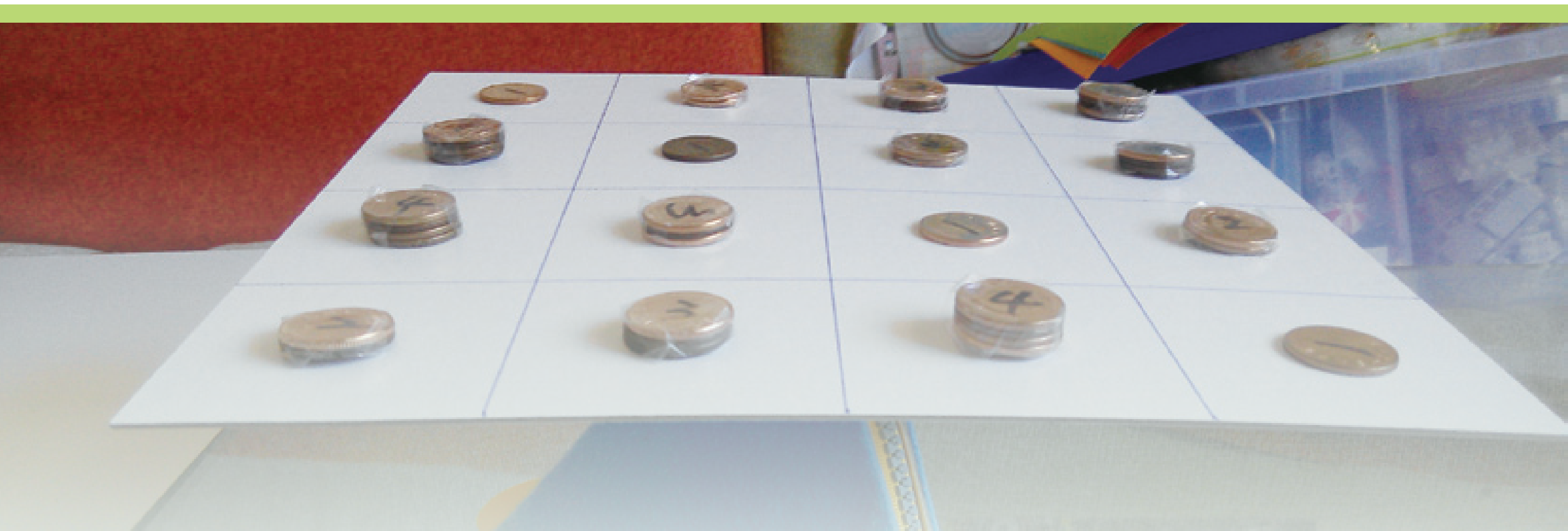


魔方陣與物理的邂逅

文／李祐宗

日常生活中充滿了許多令我們好奇的事物，也有許多可以和教學相結合的素材。學習應是有趣的、多元化的、自發性的、甚至是跨領域的。提到跨領域學習，筆者認為並非所有單元的學習非得跨領域不可，而是視單元的內容而定。許多讀者或許都玩過與天平或者平衡有關的遊戲或教具。有回筆者想起若將魔方陣的數字改為相對應的重量，方陣變成實體的平板，則此平板是否可以平衡呢？

魔方陣是令人耳熟能詳的數學玩意。魔方陣的起源最早的傳說在於夏禹治水經過洛河時，看見當時河口有隻神龜，龜殼上有九個圖案，再將圖案轉成今日的三階魔方陣（圖 1）。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖 1. 三階魔方陣

三階魔方陣經過鏡射、旋轉可得到八種不同的魔方陣（有興趣的讀者可以研究看看），坊間也有不少從方陣衍伸出的趣味遊戲。由於 N 階魔方陣的數字組成必須構成以下要件：**每一列及每一行以及兩條主對角線的數字和皆要相同**。因此在魔方陣的建置上，需考慮數字的「分配性」。筆者依此概念將魔方陣製成實體教具，並驗證魔方陣是否會平衡。

首先準備一塊厚紙板（當天秤用，白玉卡很適合）和一正四面體（當作天秤的支撐座，支撐座的頂點不宜太尖鋭或太鈍，否則會影響平衡的結果），兩面分別畫上九宮格及十六宮格以符合研究的主題（圖 2～3），每一格的中心位置用一元錢幣來劃出砝碼放置處。將一元代表數字 1 砝碼重量，放置在天秤任一位置，看看是否天秤會失去平衡。若失去平衡，代表一元的重量大於天秤重量本身的慣性，因此砝碼的最小單位就用一元錢幣即可。2 元代表數字 2、3 元代表數字 3 等。大於兩個錢幣

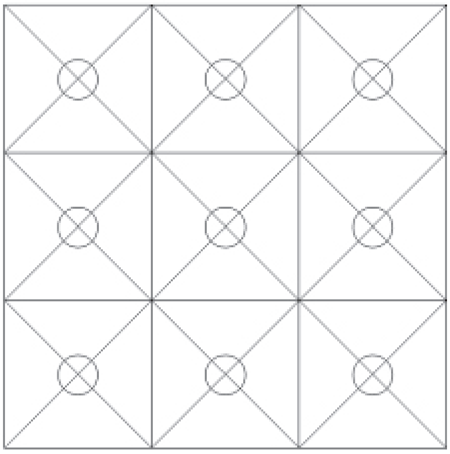


圖 2. 三階魔方陣圖板

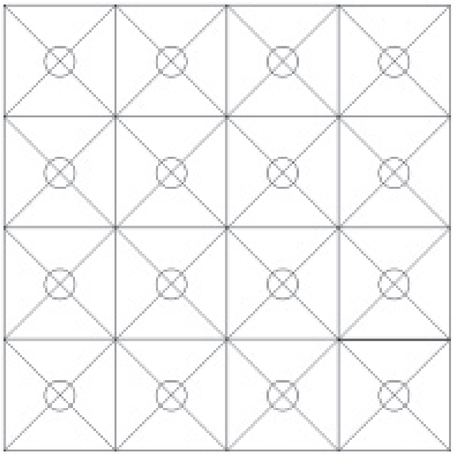


圖 3. 四階魔方陣圖板

數量時用膠帶黏在一起，由於膠帶重量不重，我們在實驗時假設忽略膠帶的重量不計。但為求實驗精確，因此可以將九個數字的膠帶長度都設定等長。成品如圖 4 ～ 6。

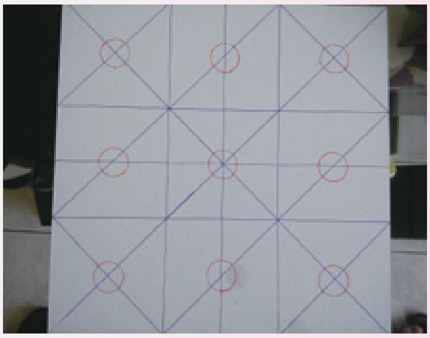


圖 4. 三階魔方陣實品

圖 5. 四階魔方陣實品

圖 6. 天秤支撐架

接著我們先試驗三階魔方陣，首先將九個砝碼放置到魔方陣的各位置，再放置在支撐點上，發現平衡。此時將一元錢幣移動，天秤失去平衡並傾斜（圖 7 ～ 8）。

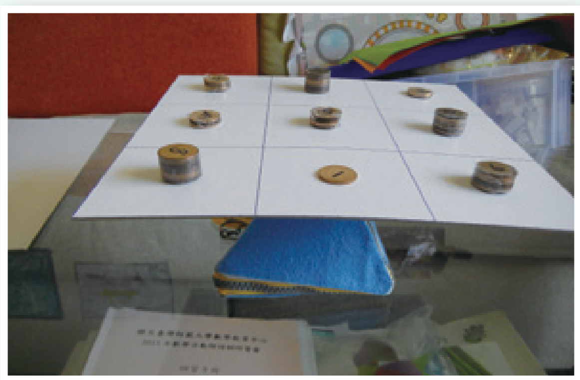


圖 7. 三階魔方陣的平衡

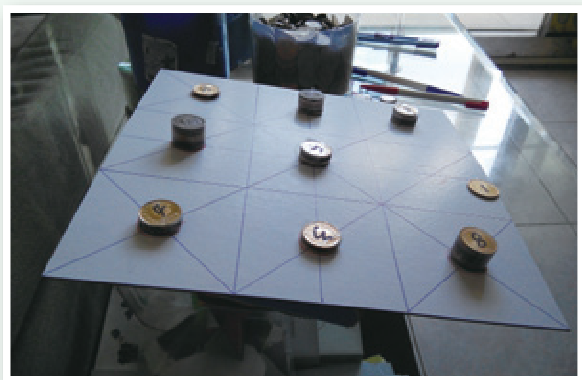


圖 8. 移動一元，天秤失去平衡

按照力矩概念，此時傾斜方向是向右傾斜，那麼將一元完全移出天秤之外會向何處傾斜呢（圖 9）？

再者，在天秤的中心點擺放任何重量的物品都不會影響天秤的平衡，因為力臂為零，造成的力矩也為零。因此若將中心點的五元拿掉，試試看是否平衡（圖 10）。

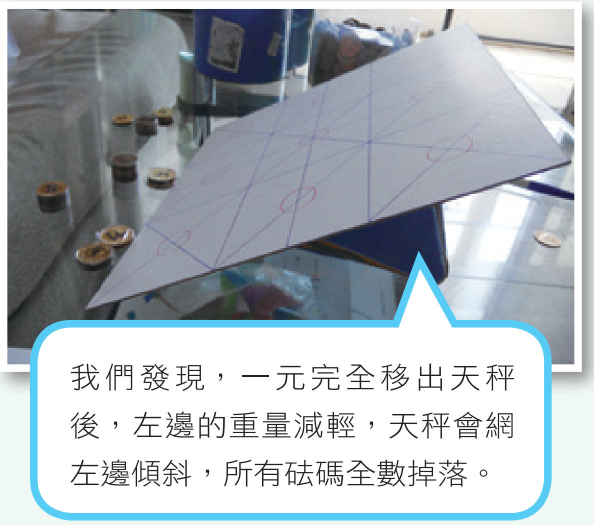


圖 9. 拿掉一元，天秤失去平衡

圖 10. 拿掉五元，天秤依然平衡

接著我們試試四階魔方陣（圖 11）。四階魔方陣為 1 ～ 16 的數字，每一行、每一列及兩條主對角線的和均為 34。進一步來說，**N 階魔方陣皆可由兩個 N 階的拉丁方陣互相正交再轉換而成（詳見科學研習月刊第 47 卷 1 ～ 2 期三階與四階希臘拉丁方陣的探討）**。

因此要知道四階魔方陣可否平衡，只要研究四階拉丁方陣可否平衡即可。N 階拉丁方陣的定義為：每一行、每一列都要有 1~N 等數字（不考慮主對角線）。四階拉丁方陣共有 576 種，我們選擇一種來試試看能否平衡，結果是平衡的（圖 12）！

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

圖 11. 四階魔方陣

圖 12. 四階魔方陣之平衡

而且，圖 13 ～ 14 所示三階拉丁方陣也可以平衡。

2	3	1
3	1	2
1	2	3

圖 13. 三階拉丁方陣

圖 14. 三階拉丁方陣之平衡

至此只是實驗，要證明得有理論支持才行。現在我們來證明 N 階拉丁方陣可以平衡的，當然這只要用到簡單的力矩概念便行。我們先將方陣畫出直的、橫的中心線（若偶數階的方陣中心位置會在格子頂點上、奇數階的會在格子中心上，如圖 15 ～ 16 所示）。

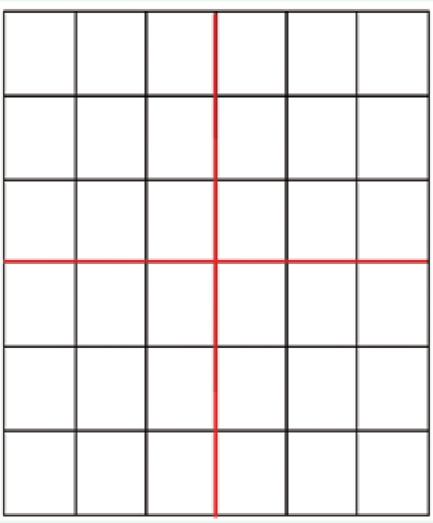


圖 15. 偶數階拉丁方陣

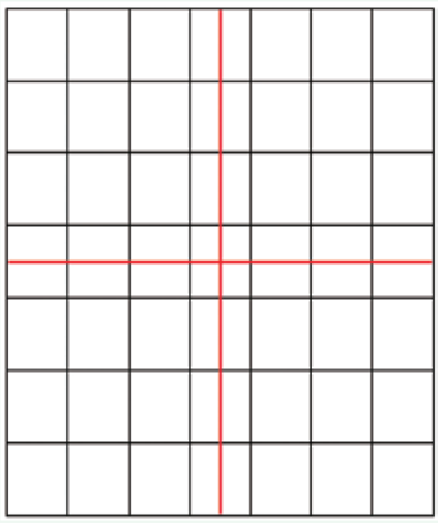


圖 16. 奇數階拉丁方陣

無論何者，所有座標的砝碼相對於中心點的合力矩和只要為零，天秤就會平衡。力矩是砝碼到中心點的距離（可能有直線或斜線），斜線距離為利用畢氏定理將該砝碼 X 與 Y 座標算出的距離。計算平衡時，為了簡化問題，我們可以將每個砝碼的 X 與 Y 座標分開計算。

也就是說，要證明天秤是否平衡，可以分兩部分探討。第一為以縱軸為分界線，右邊與左邊砝碼造成的水平方向力矩和要為零；第二為以橫軸為分界線，上邊與下邊砝碼造成的垂直方向力矩和要為零。若是遇到奇數階魔方陣，則中心列的數字不算在內。

假設一 N 階拉丁方陣如圖 17（頁 52）（N 為偶數，粗黑體代表該格子砝碼重、下方為相對應之座標）。

1 (-N+1,N-1)	2 (-N,N-1)	…	N/2 (-1,N-1)	N/2+1 (1,N-1)	N/2+2 (3,N-1)	…	N (N-1,N-1)
N (-N+1,N-2)	1 (-N,N-2)	…	N/2-1 (-1,N-2)	N/2 (1,N-2)	N/2+1 (3,N-2)	…	N-1 (N-1,N-2)
N-1 (-N+1,N-3)	N (-N,N-3)	…	N/2-2 (-1,N-3)	N/2-1 (1,N-3)	N/2 (3,N-3)	…	N-2 (N-1,N-3)
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
4 (-N+1,-N+3)	5 (-2N,-N+3)	…	N/2+3 (-1,-N+3)	N/2+4 (1,-N+3)	N/2+5 (3,-N+3)	…	3 (N-1,-N+3)
3 (-N+1,-N+2)	4 (-N,-N+2)	…	N/2+2 (-1,-N+2)	N/2+3 (1,-N+2)	N/2+4 (3,-N+2)	…	2 (N-1,-N+2)
2 (-N+1,-N+1)	3 (-N,-N+1)	…	N/2+1 (-1,-N+1)	N/2+2 (1,-N+1)	N/2+3 (3,-N+1)	…	1 (N-1,-N+1)

圖 17. N 階拉丁方陣
（N 為偶數）

力矩的定義為力矩＝力 × 力臂（力為該格子砝碼重、力臂為該砝碼至天秤中心點之距離）

【X 方向（橫座標方向）的力矩和】

1×（-N+1）＋ N×（-N+1）＋（N-1）×（-N+1）＋…＋ 4×（-N+1）＋ 3×（-N+1）＋ 2（-N+1）（**此為最左行**）＋…＋ N×（N-1）＋（N-1）×（N-1）＋（N-2）×（N-2）＋…＋ 3×（N-1）＋ 2×（N-1）＋ 1×（N-1）（**此為最右行**）＝ 0

接著以圖 18 來簡化說明上述算式。我們發現最左行及最右行的 X 座標均相同，而此兩行的重量分別為 1 ～ N，因此這兩行在 X 方向的力矩會互相抵消；同理左邊第一行及右邊第一行的力矩會互相抵消，依此類推。

1 (-N+1,N-1)	2 (-N,N-1)	…	N/2 (-1,N-1)	N/2+1 (1,N-1)	N/2+2 (3,N-1)	…	N (N-1,N-1)
N (-N+1,N-2)	1 (-N,N-2)	…	N/2-1 (-1,N-2)	N/2 (1,N-2)	N/2+1 (3,N-2)	…	N-1 (N-1,N-2)
N-1 (-N+1,N-3)	N (-N,N-3)	…	N/2-2 (-1,N-3)	N/2-1 (1,N-3)	N/2 (3,N-3)	…	N-2 (N-1,N-3)
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
4 (-N+1,-N+3)	5 (-2N,-N+3)	…	N/2+3 (-1,-N+3)	N/2+4 (1,-N+3)	N/2+5 (3,-N+3)	…	3 (N-1,-N+3)
3 (-N+1,-N+2)	4 (-N,-N+2)	…	N/2+2 (-1,-N+2)	N/2+3 (1,-N+2)	N/2+4 (3,-N+2)	…	2 (N-1,-N+2)
2 (-N+1,-N+1)	3 (-N,-N+1)	…	N/2+1 (-1,-N+1)	N/2+2 (1,-N+1)	N/2+3 (3,-N+1)	…	1 (N-1,-N+1)

圖 18. N 階拉丁方陣
（N 為偶數）

同理可證，Y 方向的力矩和也會相抵消，且奇數階的方陣證明亦然。因此我們證明一個 N 階拉丁方陣或魔方陣物理化之後的天秤皆能平衡。反之，一個排錯的拉丁方陣或是魔方陣的天秤是不會平衡的。

現在了解此原理後，在教導魔方陣之前，可試著將此天秤與砝碼由學生來操作，試試看九個砝碼如何擺才能使天秤平衡，平衡後立即出現魔方陣。另外依此物理原理，我們可以推知若將任意四階魔方陣分成四個象限，則此四個象限內的重量應相等，舉例如圖 19 ～ 20 所示。

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

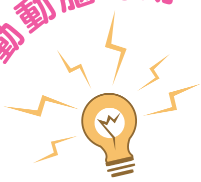
圖 19. 四階魔方陣

34	34
34	34

圖 20. 四個象限和均為 34

因此，研究四階魔方陣除了也可以先將 16 個數字（1 ～ 16），分成四組數字和為 34 ，分成四個象限再作微調即可得到。甚至同一魔方陣經過行與列的對調、翻轉或旋轉又可變化出許多的魔方陣。

動動腦時刻



現在我們來玩個物理小遊戲，我們將一個三階魔方陣天秤擺好後，移動或移出某個天平會往哪裡傾斜呢？

（一）

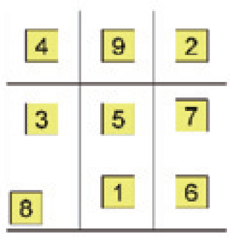


圖 21. 移動 8 的天秤

（二）

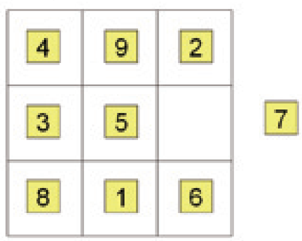


圖 22. 移出 7 的天秤

（三）

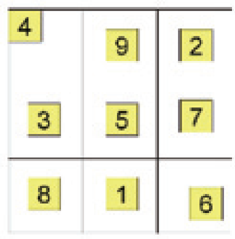


圖 23. 移動 4 和 6 的天秤

我們探討或研究問題經常只限於一個領域，有時某一種觀念卻與另一領域有關。這世界充滿著大自然與數學、物理間的微妙關係呢！多觀察、多發現會產生許多燦爛的火花！

備註：文中所述魔方陣天秤設計已獲得中華民國新型專利第 M555041 號，如有相關問題請與作者聯繫。

李祐宗
澎湖縣立文光國民中學數學科教師