

二進位骰子

文／李祐宗

二進位在數學教育是常見的課外補充教材，二進位的教學除了可以與十進位做比較以外，亦可讓學生了解數字的進位與編碼關係，有關二進位的數學學習題材也屢見不鮮。骰子更是學習機率很常見的好幫手。最近，筆者研發出將二進位數字與常見的木頭方塊做結合，變成二進位骰子。此遊戲可以將現有的二進位趣味活動做更寬廣的玩法，且製作方式相當簡單。

何謂二進位呢？在談二進位之前，通常會先跟學生介紹目前慣用的數字系統是十進位。也就是每一個空格（個位、十位、百位等等）只能 0～9，共十個數字，不能填到 10。所以二進位的意思是，每個空格只能填 0 和 1 共兩個數字，不能填到 2。例如十進位的 2 必須進位成 10（如圖 1）。接著舉例說明十進位與二進位的轉換規則：

十進位	二進位	十進位	二進位
1	1	6	110
2	10	7	111
3	11	8	1000
4	100	9	1001
5	101	10	1010

圖 1. 十進位 1～10 的二進位對照

十進位的1~10如何轉成二進位呢？

如遇到較大的數字，常見的方式是利用短除法進行轉換編碼，例如圖2，十進位的123如何轉成二進位的數碼記法呢？

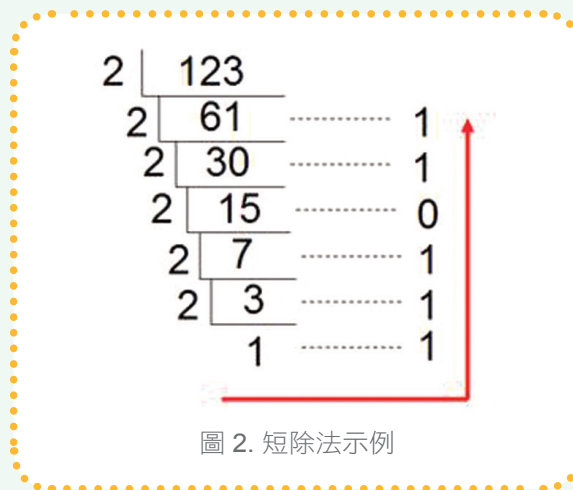


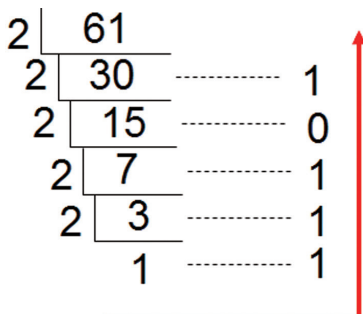
圖 2. 短除法示例

每一次短除法記錄所剩的餘數（縱向紅色箭頭所列數字），再加上最後的商(1)，順序由最後的商倒著唸回去：1111011即是十進位的123轉成二進位的數碼記法，通常我們記成：

$$123_{10} = 1111011_2$$

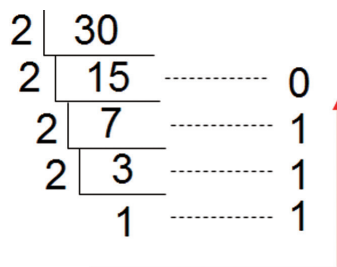
其實在上述的短除法中，還一併出現其他數字的短除法，例如61、30、15等，如圖3~5。

除此外，網路更有許多專家開發相關程式，只要輸入數字就可以得到相對應的結果。讀者有興趣可以上網查詢相關程式並練習。



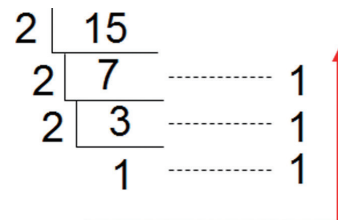
$$61_{10} = 111101_2$$

圖 3



$$30_{10} = 11110_2$$

圖 4



$$15_{10} = 1111_2$$

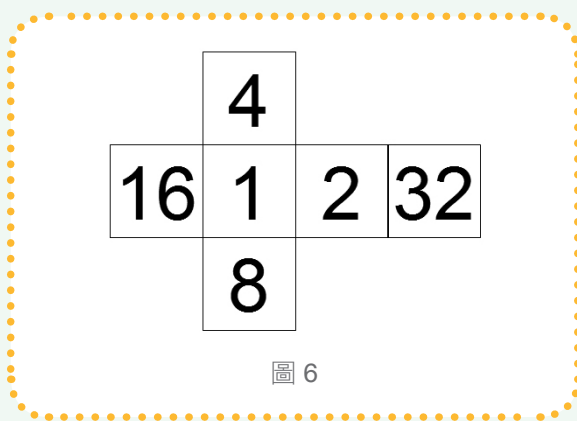
圖 5

二進位數字如何轉成十進位數字呢？

我們先談談將十進位的數字如何用 10 的次方表示。例如 123 可以表示成 $1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ ，因此，二進位的 1111011 亦可以用 2 的次方和表示。因此此數轉成十進位的數字為： $1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 123$ 。其餘數字的轉換依此類推。

二進位骰子及初階玩法

利用正方體木頭方塊，在六個面寫上 1、2、4、8、16、32，依據遊戲所需斟酌所需的數量（圖 6）。



*玩法一：

每名學生各準備相同骰子 3 顆，老師問學生：三顆骰子點數加起來最小值及最大值為何？學生應會回答最小值為 3 及最大值為 96。老師由 3 ~ 96 中任選一數字，每當老師說出任一數字，比較那名學生可最先將 3 顆骰子最上面的數字加起來符合老師指定的數字者予以加分或記點。例如老師說出：42，學生可以湊出 2、8、32；老師說出：6，學生可以湊出 2、2、2，或者 1、1、4 等。

神奇的是，當老師說出 15 時，卻沒有同學可以拼得出數字。老師再說 29 時，也沒同學得到答案。

*玩法二：

學生甲乙兩人一組，各 3 顆骰子。猜拳由甲乙雙方輪流喊數字，假設甲方先喊一個數字，乙方要在 5 秒內完成點數和，若在時間內完成則乙方加分或記點；若甲方喊的數字無解，則扣甲方的分數或點數，下回換乙方指定數字時亦然。建議規定指定數字的學生亦需在五秒內指定，如此可增加緊張的氣氛，效果更好。

經過玩法一或二之後，接著請學生分析有那些數字在 3 顆骰子下無法拼出。首先我們先將問題縮小，兩顆骰子可以拼出的點數和如表 1。

表 1 兩顆骰子可以拼出的點數和

骰子 2	骰子 1					
	1	2	4	8	16	32
1	2	3	5	9	17	33
2	3	4	6	10	18	34
4	5	6	8	12	20	36
8	9	10	12	16	24	40
16	17	18	20	24	32	48
32	33	34	36	40	48	64

我們發現兩顆骰子可以湊出的點數有：2、3、4、5、6、8、9、10、12、16、17、18、20、24、32、33、34、36、40、48、64 等共 21 個數字，也就是說有 43 個數字是拚不出來的。由於兩顆骰子有超過半數以上的數字不能拚出，所以不建議用兩顆骰子玩點數和的遊戲，因為效果會過於單調及容易預測結果。

玩法一和二皆是 3 顆骰子，可以湊出的點數和會比較多嗎？我們可依據表 1 的 21 個點數和，再各自加上 1、2、4、8、16、32，可再另外得到以下數字：2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、

14、16、17、18、19、20、21、22、24、25、26、28、32、33、34、35、36、37、38、40、41、42、44、48、49、50、52、56、64、65、66、68、72、80、96 等共 47 個數字，也就是將近一半的數字可以拚出，可以拼湊的數字比例上較 2 顆骰子為佳，也不容易預測。

上述尋找可以拼湊的方式若不使用特殊方法，只能利用窮舉法一個一個找，不但耗費時間也容易出錯。有沒有更好的方式呢？首先回到原來的問題來探討，此骰子面上皆是二進位數字（也就是各是 2 的各次方數字）所組成，如表 2。

表 2 二進位骰子上的數字

二進位	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
數字	1	2	4	8	16	32

例如： $14 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ 。由於必須各有一個 8、4 和 2，也就是說三顆骰子可以拼得出來；而 14 的二進位碼是 1110，有三個 1，因此也拼得出；而像 15 的二進位碼是 1111，故三顆骰子是拼不出來的，必須再加一顆骰子（至少四顆）才能拼得出來。

因此我們發現三顆骰子可以拼出的 47 個數字當中，其二進位碼都不超過三個 1 (如表 3)，也就是說二進位碼超過三個 1 的數字都是拼不出來的。

表 3 1 ~ 65 中可由三顆二進位骰子拼出的數字

十進位	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
二進位	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
十進位	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
二進位	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010	10011	10100	10101
十進位	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
二進位	10110	10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111	100000
十進位	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
二進位	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111	101000	101001	101010	101011
十進位	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
二進位	101100	101101	101110	101111	110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110
十進位	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
二進位	110111	111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111	1000000	1000001

六顆骰子的玩法及問題

看到此，讀者應可利用二進位表輕易判斷該數能否由一定數量的骰子拼出來。話說回來，若骰子增加的六顆，是否所有的數字 (6 ~ 192) 都可以拼出來呢？由於 192 轉成二進位為 11000000，表示前一位數 191 為 10111111，因此數有七個 1，超過骰子的數量 (6)，因此 191 是排列不出來的。或者用另一種方式說，假

設有五個骰子面數都是 32，也就是已經有 160 點了，若第六顆骰子為 8，則可以得到 168，為此遊戲的第二大值，接著是 164、162、161 等。

那麼，6 ~ 192 當中，還有那些數字是排不出來的呢？讀者有興趣不妨自行研究，舉個例說，135 可否拼出？由表 4 可知，需要 1、2、4、128 各一個，而 128 必須由四個 32 的點數湊成，也就是必須要有 $3 + 4 = 7$ 顆骰子才能完成。

表 4 135 需幾顆骰子才拼得出？

二進位	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
數字	1	2	4	8	16	32	64	128
135 數目	1	1	1	0	0	0	0	1

再舉一例，164 可否拼出？由表 5 可知，需要 4、32、128 各一個，而 128 必須由四個 32 的點數湊成，也就是必須要有 $2 + 4 = 6$ 顆骰子，故六顆骰子可拼出。

表 5 164 需幾顆骰子才拼得出？

二進位	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
數字	1	2	4	8	16	32	64	128
135 數目	0	0	1	0	0	1	0	1

進階問題

表 4 和表 5 提到 128 這數字，它的二進位數碼記法是 10000000，讀者或許一時會誤解為只要一個骰子即可。這樣思考或許沒有錯，但必須是單獨一顆骰子上面有 128 這數字。由於此遊戲設計每顆骰子最大值是 32，因此需要四顆骰子合計。或者說， $128 = 2 \times 64$ ，因此也可設計成兩顆骰子的組合，抑或是 $128 = 8 \times 16$ ，也就是八顆 16 的骰子組合也可（如表 6）。

其餘數字依此類推。現在為了掌控遊戲效果，可否了解在骰子數量固定下，那些數字是容易判斷無法拼出的呢？如表 7，稍微掌握一下部分的規則，就可以增加遊戲的刺激度。

表 6 拼出 128 所需骰子數目

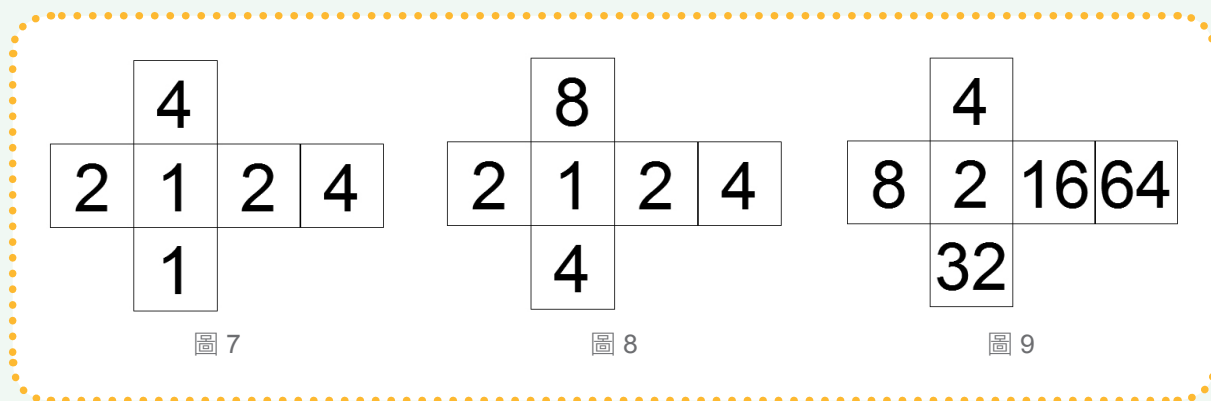
128 分解方式	骰子數目
1×128	1
2×64	2
4×32	4
8×16	8
16×8	16
32×4	32
64×2	64
128×1	128

表 7 骰子數量固定下無法拼出的數字列舉

骰子數目	2	3	4	5	6	N
骰子和最大值	64	96	128	160	192	$32N$
骰子和次大值	48	80	112	144	176	$32N - 16$
不能拼出的數字列舉	49 ~ 63	81 ~ 95	113 ~ 127	145 ~ 159	177 ~ 191	$(32N - 15) \sim (32N - 1)$


另類玩法

為增加遊戲的複雜性及趣味性，骰子的六面數字不一定非固定不可，亦可以變通一下，只要每面數字皆為 2 的次方數即可，例如圖 7 ~ 9 可供參考，其圖形可依讀者需要延伸出更多種設計，每次遊戲可搭配不同骰子及數量進行。



結語

這是一個講求互動、追尋學習樂趣的新時代，許多身邊簡易的事物往往經過巧

手一變，便能產生新的事物。有時當兩種尋常普通的東西，經過互相碰撞就會產生新的火花！

李祐宗
澎湖縣立文光國民中學數學教師