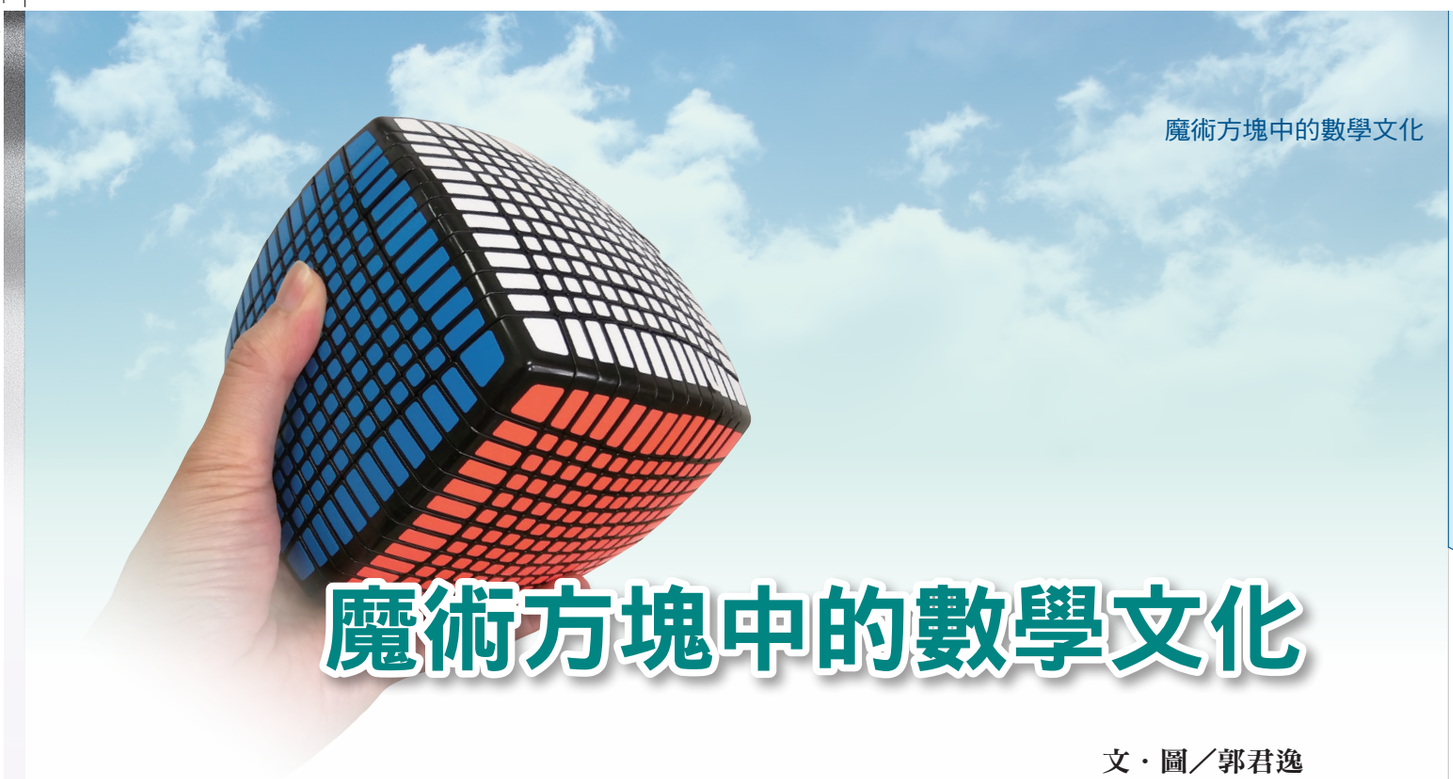

魔術方塊中的數學文化

文・圖／郭君逸

簡介

魔術方塊（Rubik's Cube），簡稱魔方，是由匈牙利盧比克（Ernő Rubik）教授所發明，最早只是為了設計出 3×3×3 並能任意旋轉不會散開的立方體結構，結果沒想到六面塗上不同顏色後，能夠風靡全球。從 1980 年開始，魔術方塊連續 3 年榮獲年度最佳益智玩具（Toy of the Year）的頭銜，至今獲獎無數，家喻戶曉，人手一顆，流行了 40 幾年，其魅力一直不減。而有很多的設計師，基於魔術方塊的想法和結構，設計出了很多的變形魔方。

最早以改造方塊出名的是費雪（Tony Fisher），他所設計的費雪方塊（Fisher's Cube）當時也是非常轟動；近年來由於塑膠製模技術改進、3D 電腦繪圖技術的成熟、以及 3D 印表機的發明，傳統手工改造的魔方已不多見，取而代之的全都是 3D 列印方塊，比較受歡迎的變形魔方，就會被廠商拿去製模量產。這些魔方的外型通常都比較對稱，因此有八成以上的變形魔方外觀都是「正多面體」（regular polyhedron），而有九成九以上的變形魔方都是「等邊多面體」（equilateral polyhedron），幾乎每個月都會有新的變形魔方問市。目前量產最高階的正立方體魔方為 13 階（魔方中俗稱的「階」指的是多面體的邊被切了多少小塊，與數學中的「維度」不同），正 12 面體的魔方為 9 階，正四面體魔方為 5 階。荷蘭方塊設計大師奧斯卡（Oskar van Deventer）的 17 階立方體方塊，讓他在 2011 年拿到了金氏世界紀錄（Guinness World Records）。

競速

1990 年由華裔的毛台勝（Tyson Mao）創立了世界魔方聯盟（World Cube Association, WCA）後，魔方類的益智玩具（twisty puzzles）競賽，開始有了一個世界級的認證機構，任何的魔術方塊競賽，若想要受到 WCA 認證，就須要向 WCA 申請，比賽成績才會被收錄到 WCA 的資料庫中，所有曾參加過 WCA 認可比賽的選手，在它們的資料庫中都會有詳細的紀錄。全球每個禮拜都會舉行好幾場這樣的競賽，熱門時節，甚至可以高達 20 場；因此在世界各地都會有 WCA 的認證員（delegates），比賽時會在現場執法、裁判，臺灣目前有三

位認證員，而每年也大約有四、五場的認證比賽。

臺灣最近這波流行主要起於 2003 年，發源於當時最大的網路社群批踢踢中的魔術方塊版（Rubiks），幾乎每個禮拜都有聚會，討論各種魔方的解法，交流彼此心得，並由幾位長老級的玩家，開始參加 WCA 認證的比賽，帶領臺灣進入國際舞台。臺灣的比賽成績一向非常優秀，有幾個項目還曾拿過世界冠軍。近年來，因為臉書（Facebook）的興起，目前社團已轉往臉書的粉絲團發展。

數學文化

培養數學素養是目前 12 年國教非常重要的一個目標。數學素養講求的並不是機械式的計算、定理的證明或問題的解答，而是對數學的感覺，讓學生能了解到什麼時候會用到數學？數學是有用處的！能夠欣賞數學的美！讚嘆數學的巧妙！而數學遊戲是最常利用來培養數學素養的工具，希臘文中，遊戲（paidia）和教育（paideia）這兩個字的字根是一樣的，表示此二者的關係匪淺。柏拉圖（Plato）是第一個研究此二者關係問題的學者。杜威（J. Dewey）說過：「遊戲和工作的進行能促進青年智力和道德的成長。」可見，數學遊戲的教育價值是被教育學者所認可。魔術方塊其實是一個很難的數學遊戲，背後隱藏著很多高等數學，包含李代數、群論、數論，美國海軍學院（U.S. Naval Academy）數研所的喬依努（W. David Joyner）教授曾寫了一本《魔術方塊中的數學講義》（Lecture Notes on the Mathematics of the Rubik's Cube）。達維斯（Tom Davis）在 2006 年也寫了一本書《魔術方塊中的群論》（Group Theory via Rubik's Cube）。哈佛的陳（Janet Chen）也寫了一本《群論與魔術方塊》（Group Theory and the Rubik's Cube），嘗試利用學生對魔術方塊的興趣，來教授其中的代數群論。此課程每年都會在哈佛數學系的「暑期榮譽數學營」（Honors Summer Math Camp）中實施。這些課程都是數學系，甚至是數研所才會接觸到的課程，因此一般國高中的數學課堂上，很少有利用魔術方塊來引發學習動機的活動出現。

但為什麼魔術方塊在學生族群中這麼流行？當然吸引他們的，並不是因為要學習上面提到的這些代數或群論。本文也不鼓勵一般讀者去讀這些課程，這些課程，都是數學家先在純數中打滾了半輩子之後，看到了與魔術方塊之間的關聯，才整理出來的，真的會這些數學理論的人，少之又少。魔術方塊迷人的地方，在於它樸實外觀下，隱藏著艱難的解法，以及解出來後的成就感。我國科技部的一份研究報告指出，魔術方塊在數學文化的角色中，包含了三個面向：文化面向、數學面向和接觸意願（圖 1）。

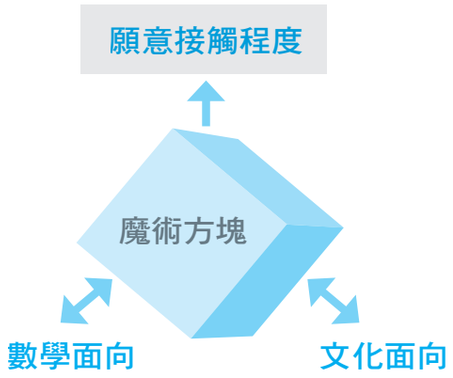

圖 1　魔術方塊在數學文化的角色中包含了三個面向。

文化面向有三個因素可以加以詮釋，其一是「成就感與興趣」，即解魔術方塊中得到成就感，與從他人獲得的認同。其二是「認知思考歷程」，解魔術方塊時，腦中的思考歷程，是魔術方塊吸引人之處。其三則是「便利與潮流」，可以隨身攜帶、隨時拿出來轉，也是它吸引人去玩的原因。數學面向可以由兩個因素來詮釋，其一是「具數學特徵之能力」，解魔術方塊可以發展一些具有數學特徵的能力；其二則是「連結」，可以幫助他們增進腦中思維的連結。

從一些社會文化現象也可以看出，魔術方塊給人很深刻的數學連結。很多的電影和電視劇中，只要劇中有個聰明科學家、睿智的偵探、足智多謀的團隊，導演都會讓魔術方塊出現在劇中，尤其是時空穿梭劇，常常都會有主角拿魔術方塊考驗古代軍師的橋段出現。

數學在那裡？

大家都知道魔術方塊跟數學有很強的連結，但若撇開高等數學不談的話，還有數學嗎？當然有的，而且無所不在！

以最吸引群眾目光的速解魔方（speed cubing）來說，雖然選手們看似只是照腦中熟記的公式，直覺地快速將魔方完成，但事實上在轉的過程中，腦中其實都是數學邏輯在運作。為何在過程中，僅看到方塊的某幾個面，就知道接下來一定是要使用那個公式，而不用把六面都看過一次，因為選手知道從眼前這兩個面的情況就可以推理出後面的長相，這些思考過程的時間幾乎都是瞬間的。就好比計算根號 1024 ，可以立刻知道是 32 ，因為 $1024 = 2^{10}$ ，而 $\sqrt{1024} = (2^{10})^{1/2} = 2^5 = 32$ ，或是直角三角形兩股分別為 3 與 4 ，可以立刻知道斜邊是 5。雖然用口頭解釋，可以說是指數率、畢式定理，但事實上在計算的時候這些推理過程都是在腦中一閃而過，看似沒有在想，其實大腦是在快速的做邏輯推理。對沒學過這些數學定理的人，是一定沒有辦法這麼快計算出答案的。這是人類大腦非常厲害的地方，一連串的邏輯推理可以在瞬間完成，目前科學家也無法解釋這個神奇的現象，為什麼職業圍棋選手，可以只考慮幾手之後的局勢，而下贏每秒計算幾億步數的電腦。從臺灣各項魔方紀錄的前幾名選手來看，大多都是讀電機系、數學系、醫學系，或是國高中的資優班學生，可見要能夠把魔術方塊在 10 幾秒內完成，並不是死背公式，每天練習就可以達成的，須要有不錯的邏輯推理能力才行。

此外，有著數學的輔助，也可以讓比賽選手更快完成魔方。賓漢頓大學（SUNY Binghamton）電機與電腦工程系弗里德里希（Jessica Fridrich）教授設計的一套解法，大約 100 個公式左右，公式雖多，但讓整個解法流程樹變廣，深度變淺，每次只要用到其中四、五次公式操作，就可以將魔方完成。現今世界的速解玩家使用的解法，大多都是由她的解法改進而來的。

一般罕見變形方塊的解法，都會先分類，把所有會動的小塊，分成彼此不相干的幾類，然後每一類小塊，都要分別解決方向（orientations）與位置（permutations）的問題即可。解法用的幾乎都是「正負相消」的原則，什麼意思呢？舉個兩個簡單的例子，例 1：若有某個動作 $\mathcal{F}$ 可以同時把 A, B, C 三小塊都做順時針轉一個方向，我們就可以把整個魔方轉個角度，並把動作 $\mathcal{F}$ 倒轉，讓 B, C, D 三小塊都逆時針轉一個單位，這兩個動作合起來，就有「A 小塊順轉，D 小塊逆轉」的效果，B, C 小塊

一順一逆被抵消了。

例 2：位置的交換也是一樣，若有個動作 $\mathcal{F}_1$ 可以讓 A 換到 B，B 換到 C，C 換到 A，另一個動作 $\mathcal{F}_2$ 的作用是 A 換到 B，B 換到 C，C 換到 D，D 換回到 A 的話，就可以先做 $\mathcal{F}_1$，再逆做 $\mathcal{F}_2$，即可達到 C,D 互換的效果，A,B 的動作被抵消了。這兩個例子若用數學語言呈現，就會變成 (1,1,1,0)-(0,1,1,1) = (1,0,0,-1) 與 $(ABC)(ABCD)^{-1} = (CD)$ 這樣。因此魔方玩家在思考如何解出陌生的方塊時，都是在做正負相消的動作，把本來一次會改變四、五個小塊的動作，做一些抵消，改成一次只改變兩個小塊，甚至是一個小塊，也就是在做「化簡」。然而，這些工作在代數學中很多都早已被研究過。

因此不管是魔方競賽選手，或是變形魔方玩家，他們雖然不一定學過大學代數或群論，但這些沒有任何數字的思考的邏輯，其實處處是數學。

學數學很有用

常常有學生會問：「學這麼多的數學有什麼用？只會加減乘除，也是可以生活。」這其實是缺乏了目前課綱中所講求的數學素養。雖然不學數學的確也可以過生活，但學了卻可以讓生活過得更美好。

數學是科學之母，而計數（counting）又是數學中最須要的能力。對魔術方塊來說，能夠計算一些數量，將會有很大的幫助。

對速解玩家來說，再多的公式都不是問題，只要能加速完成的時間，背再多的公式也願意，但是在設計解法的時候，怎麼知道只會有這些情況？為何 3 階立方體魔方第三層方向只有 57 種情況？為何 3 階 12 面體最後一層角塊方向只有 16 種？是否有缺漏？若少記了一兩種情況，就很有可能在分秒必爭的比賽中大舉落後。這方面的數量計算大多都與環狀排列有關。另外，如果有一套新的速解解法需要背 60 個公式，要學的話，務必會經歷一段「過渡期」，但若可以計算出每個公式發生的機率的話，玩家就可以從發生機率高的公式開始背，將過渡期縮短。

變形魔方百百種，但事實上，有很多時候都可以利用別的魔方的解法來完成其某個部份，甚至解法完全相同。所以能夠看出兩個魔方中的相同結構，是可以省很多無謂的嘗試時間的。這些跟代數中的同構（isomorphism）或同態（homomorphism）有關。例如圖 2 所示幾個變形魔方都跟一般 3 階立方體魔方結構是一模一樣的。

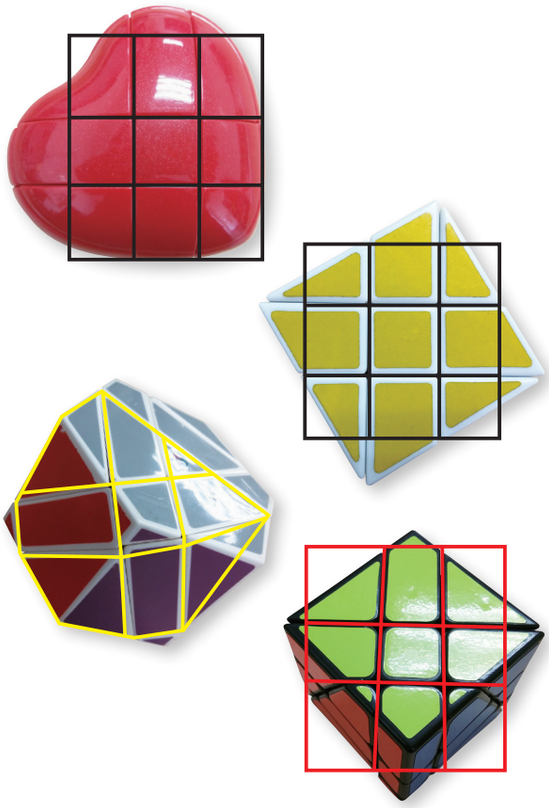

圖 2　各種變形魔方跟一般 3 階立方體魔方的結構相同。

筆者常常收到一些學生的 email 問說某個魔方特殊狀況要怎麼解決？某個狀況網路上都找不到公式怎麼辦？結果常常都是因為該生的魔方散開過，沒有正常組裝回去，而出現了不可能發生情況。若這時可以立刻看出這是無法完成的情況，立馬拆開重新裝，就可以省下很多無謂的嘗試。或是魔方拆開清洗的時候，組裝其實很花時間，但若可以知道什麼樣的情況是一定可以完成，就可以任意組裝，剩下最後幾顆小塊時，再依正確方式組裝回去即可，也可以省下不少時間。這些與代數中的奇偶排列（parity）有關。

程式設計高手有時會想要用電腦輔助，窮舉或是暴力跑一些結果，這時若能計算出該魔方有幾種不同變化的話，先估計一下是否可行？若需要花很長的時間的話，就可以打消此念頭，或是另擇它法了。例如 3 階立方體魔方大約有 4.3×10^{19} 種情況，每種情況用目前最快的電腦和最佳的程式去跑出它的最短步數解法的話，差不多需要幾秒到幾分鐘不等，而要跑完所有的情況，估計一下就會發現至少需要幾億年以上，此時馬上就可以打消這樣的念頭了。

方塊設計師設計方塊時，如懂得運用到更多數學，可以節省嘗試時間、製作材料、製作經費……等等。筆者親身經歷，某個魔方的設計廠商設計了一個新型的正立方體魔術方塊，每個面有 A 或 B 兩種不同的結構，總共有 10 種不同的組合，該廠商將此 10 種都取了不同的名字出售；事隔一年，廠商想要把此結構用在正 12 面體上，但要生產的時候，卻弄不清有幾種不同的情況，於是廠商到魔術方塊論壇上發問，結果引起了廣大的討論，玩家們用了各種方式想要算出有幾種，答案也都不同。後來筆者就用了 Polya counting 計算出答案，並把 1A11B、2A10B、3A9B……各種情況有幾種都列出來，幫廠商解決了該問題。

學術上的魔方

在學術方面，魔術方塊發展至今時間並不長，其中最大的研究課題就是「3x3 魔術方塊，可以保證最少在幾步完成？」1982 年佛雷（Alexander H. Frey, Jr.）與辛馬斯特（David Singmaster）合著的《魔術方塊手冊》（Handbook of Cubik）裡，稱這個答案為「上帝的數字」（God's number），並證明這個數字介於 17 ～ 52 之間；書中並也大膽猜測上帝的數字為 20。1995 年，美國的瑞德（Michael Reid）證明了某些情況至少需要 20 步才能完成，他將這些情況稱做「Superflip」，同時，他也證明了可以在 29 步內完成所有的方塊，一口氣把上帝的數字範圍縮小到 20 ～ 29 之間。2006 年，雷杜（Silviu Radu）用群論證明了上界可以再縮小到 27 步，他將所有的情況分成幾類，並借助離散代數系統（GAP）證明出在 27 步內都能完成。1990 年，美國東北大學的電腦科學家古柏曼（Gene Cooperman）等人，在一個代數編碼的研討會上，發表了「2×2×2 的方塊皆可在 11 步內完成」；2007 年，古柏曼與他的學生庫柯爾（Daniel Kunkle）將這個方法推廣到 3×3×3 的方塊上，證明出 26 步內皆可完成。2008 年，美國史丹佛大學的羅區奇（Tomas Rokicki）繼證明 25 步即可完成後，5 月又在「魔方領域論壇」（Domain of the Cube Forum）中宣稱可以證明出 23 步即可完成，8 月他又提出了可以在 22 步內完成的證明，震驚了全世界。事隔兩年，2010 年 7 月，由羅區奇及一些數學家與電腦工程師，共同證明了上帝的數字為 20。也就

是 3×3×3 的魔術方塊，不管轉成什麼情況，都可以在 20 步以內完成。另一方面，在電腦不發達的年代，佛雷竟然可以精準地猜測上帝的數字，實在非常讓人驚訝。

學魔方的好處

「學習魔術方塊是否能讓我的小孩數學成績進步呢？」這答案當然是否定的。學習魔術方塊雖然可以增加數學邏輯思考，但這是需要長時間的潛移默化的，並無法在一兩個月內讓成績突飛猛進的。

學習魔術方塊最大的好處就是可以「增進人際關係」，不管是在學業上，職場上，人際關係都佔了很大部分。玩家彼此之間交流，討論，即使是打鬧也好，都能夠認識更多的同好，增進友情。另外很重要的一點就是「增加自信心」，魔術方塊是很難的數學遊戲，即使是要看懂別人的解法、公式，也不是那麼容易。因此，若有辦法完成，通常都會得到長輩的讚美，同儕的欣賞，自然而然地自信心就會增加，這也是教育理念中的「用鼓勵取代責罰，用讚美取代打罵」最佳的寫照。筆者剛到學校教書時，學校的特教中心通知，班上的某生是輕度自閉症患者，希望導師特別關注。而該生在課堂上學習到轉魔術方塊後，開始對魔方產生極大的興趣，常常到我辦公室學習各種變形魔方，與我討論解法，後來他還自己整理了一本數學遊戲的心得，漸漸的同學間有什麼疑難雜症都會問他，他儼然成為了同學們的中心人物，在大三還拿到了班上的書卷獎，畢業晚會竟然還願意出來表演跳舞並把魔術方塊結合在其中，完全看不出有自閉症傾向。這位同學其實很聰明，可能因為某些原因，缺乏自信，而難有所表現而已，因此讓學生獲得自信是學習非常重要的一環。此外，玩魔術方塊也是個「良好休閒活動」，在不影響課業與不影響別人學習的前提下應該被鼓勵，至少比整天沉迷線上遊戲或是手機遊戲好多了。

學習魔術方塊還可以「培養研究能力」。很多玩家，為了讓自己的成績能夠快個一兩秒，或是想知道某變形魔方怎麼解，花好幾個小時上網找資料，跟網友討論手順、解法，出國參加比賽，為此還主動學英文、學日文，花的功夫不在話下，甚至還會寫出自己的整理的心得、解法。這些都是做研究、作學問所需具備的重要能力。

學習魔方

魔術方塊是個很難的數學遊戲，很多人會希望用理解的方式來完成它，結果都因為太難而放棄。事實上，「理解」是一個主觀的概念，並沒有很明確的定義；同樣的方法，對 A 來說是理解，而對 B 來說卻是死背。大致上有了長期記憶，或是可以經過稍微提醒，就回憶起來的話，一般就認為是理解了。

那魔術方塊應該怎麼開始學習呢？建議是先找任何一種別人整理的解法，把它看懂，練習幾次，確定所有情況都知道怎麼處理之後。開始試著背起來，其實這時應該早已快背起來了，因為經過了實際的練習，大腦會從中體會到一些道理，加深印象，這也是在數學課堂上，要讓學生親自練習，而不是老師單方面講述的原因。不靠公式而能獨自完成魔術方塊後，再進一步去探究每個公式的原理，聽聽他人對每個公式的解釋，進而改進自己的解法，這樣會比較快進入自我的理解狀態。否則

若一心要由純思考來切入魔術方塊的學習的話，常常會因為難度高而放棄。

早期 3 階魔術方塊的解法幾乎都是先解 8 個角塊，再解 12 個邊塊。經過了幾十年的演變，目前比較讓大眾容易接受的，而且比較好講授的解法幾乎都是一層一層來解的。不過不管如何，解的時候都是一小塊一小塊的處理位置與方向，所以一定不會是依一面一面的順序來解。坊間也有很多強調是「不背公式的解法」，事實上還是要背一些東西，只是從公式的背誦轉化到狀況的處理上，輔助學習者的長期記憶。這與數學的學習有異曲同工之妙，背一些東西在學習上是必須的，完全不背的話，一定很難學好。解一個數學問題，常常也都要用到一些定理來推論，而當我們在使用畢式定理、柯西不等式、洛畢達法則時，曾幾何時會去想它們的證明？我們可以把公式或定理視為是將一些常重複使用的想法或觀念包裝成工具，有了這些工具，才讓人容易做更進一步的事。「背公式」聽起來有點死氣沉沉，解釋成「運用公式」將會貼切很多。

新聞上常常會看到一個迷思「比一般魔術方塊難 18 倍的 13×13 魔術方塊被設計出來」，類似這樣的語句層出不窮。其實高階方塊並沒有比較難（圖 3），雖然看起來貼紙密密麻麻的，但是難度其實差不多，這道理就像是先會九九乘法表後，再學習「進位」後，就可以處理二位數、三位數的乘法，接下來即使 13 位數的乘法也難不倒，只是要花比較多時間而已。一般高階方塊的解法，都是將其「降階」成三階魔方，然後用一般三階魔方的解法即可處理，只要學會「降階」，100×100 的魔方，也難不倒，只是花時間而已。

圖 3　13×13×13 的魔方並沒有比較難。

結語

魔術方塊是非常困難的數學遊戲，雖然完成它的過程，並沒有任何的數字，但其實用到的思考方式，都是與數學息息相關。

數學家玩魔方，可以看出它與數學的關係；

藝術家玩魔方，可以體會它的對稱美；

小孩玩魔方，可以培養良好休閒；

老人玩魔方，可以防止老人痴呆；

而任何人玩魔方，都可以學習立體思維與邏輯，進而提昇數學素養。

希望各位讀者都能從中找到自己的樂趣，並分享自己的心得。魔方中處處是數學邏輯，沒有了數學還是可以生活，但能夠把數學應用到日常工作上，卻可以讓生活更加美好。

郭君逸　國立臺灣師範大學數學系助理教授