從 2025 的算式談創造力的培養

文／李源順

$(20+25)^2 = 2025$　　$(85-40)^2 = 2025$

現今科技進步神速的年代，社會上非常重視人類的創造力。本文旨在談如何培養學生的創造力的可行策略。

淺談創造力

創造力的主要目的是在創新有用的事物。維基百科（2025）說明創造力（Creativity），或稱創造性、才思等，是創造新事物或原創事物從而有用或可用的能力。創意則是要超越界限，跳離現有框架，重新定義事物和事物之間的關係。

數學創造力的主要目的是在創新有用的數學，用以解決問題。Silver（1997）認為數學創造力是啟動發散思考產生多元新穎數學解答的能力。Ervynck（2002）認為數學創造力是結合舊數學觀念產生新數學，組合或發現數學事實間的關係之能力。

Leikin（2009）主張普通學生的創造力應該不同於數學家的創造力；否則，學校教育無法對學生數學創造力的培養發揮功能。因此，數學家的創造力是絕對性的，是在數學方面有傲人的傑出表現；但學生的數學創造力是相對性的，是指相對於相同教育背景的同儕或與對照自己以前的表現，而有創新的數學表現（Sriraman, 2005）。

若老師想要培養學生的創造力，可以留意那些我們已經知道，但學生不知道或者尚未學到的概念，學生是否能事先想得到；假如老師還沒教的概念，學生能事先想到、自己學會，表示學生已有相對性的創造力了。

師大數學教育中心（2022）將創造力分類成三元素：流暢性，是學生能產生很多可能性的思考、過程、結果之能力。強調的是學生能流暢的思考。變通性，是指學生能產生不同類別、方式的思考、過程、結果之能力；強調的是學生思考能轉變不同層次的類別，例如：要求學生產出另一種盡量不同的思考方式或類型的答案。獨創性，是指學生能產生獨特新穎思考、過程、結果之能力。強調的是提出盡量與眾不同的想法，例如：要求學生發展別的同學都想不到的做法。本文將試著詮釋創造力的三元素。

與 2025 相關的數學

每年的元旦前後，總有許多人會對該年的數字提出許多有創意的算式來歡迎新的一年，另一方面也展現出數學內在美的藝術。

從附件的網路資料，我們發現和今年 2025 年有關的算式如下：

1. 是一個（完全）平方數：$45^2 = 2025$
2. 是本身拆成兩個數之和的平方，即：$(20 + 25)^2 = 2025$
3. 是兩個（完全）平方數的乘積，即：$5^2 \times 9^2 = 2025$
4. 是二個（完全）平方數的總和，即：$27^2 + 36^2 = 2025$
5. 是三個（完全）平方數的總和，即：$5^2 + 20^2 + 40^2 = 2025$
6. 是前 45 奇數的總和：$1 + 3 + 5 + \cdots + 89 = 2025$
7. 是 1 到 9 的所有數字的立方的總和：$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2025$
8. 是 1 到 9 的整數和的平方：$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 2025$

此外，作者也可以利用 AI（Qwen2.5-Max）的能力收集相關的算式，發現除了上面的 1 之外，多了

1. 3 個連續整數和：$674 + 675 + 676 = 2025$
2. 5 個連續整數和：$403 + 404 + 405 + 406 + 407 = 2025$

但也出現了錯誤的算式

$$46^2 - 1^2 \ (= 2115)$$

$$12^3 + 3^3 \ (= 1755)$$

$$(9 \times 8 \times 7 \times 5) + (6 + 4 + 3 + 2 + 1) \ (= 2536)$$

我們的學生是否也有可能網站的作者或者 AI（有時需要檢驗是否正確）一樣，自己創造出許多算式來迎接未來新的一年呢？本文將從培養學生的創造力提出一個可行的建議，使所有的學生未來都有可能獨創新的算式。

培養學生的創造力

要培養學生的創造力，學生從網站上**看到類似上面的算式**是必要的經驗，因為沒有類似的經驗、解決問題需求，一般人很難創新出新的事物。因此學生看到上面的算式之後，可能會產生我如何也可以創新出類似的算式？或者思考我可以使用何種另類創新的方式來迎接新的一年？

除了上述必要的經驗之外，學生能創出來的算式也都和他的**數學學習經驗**有關，因此數學概念的廣泛學習也是重要的事情。從上面的算式，發現網站上所創造出來的算式，不外乎是指數、數列或級數，以及它們的運算。有了上述的經驗以及數學學習經驗，學生若想創新，可以思考還有那些數學概念也可以創造和 2025 有關的數學呢？

此外，有了經驗、需要的數學知能之外，學生可以從下面的策略思考，創新出新的算式。

一、嘗試錯誤或有系統的嘗試錯誤

當我們面對一個從未見過的新問題，同時對解決此問題毫無頭緒時，作者發現嘗試錯誤，尤其是**有系統的嘗試錯誤，是一個不錯的創新策略**，因此，學生可以從他學過的基本數學概念出發找尋可能的算式。在此同時，假如學生學會基本的 excel 或者寫程式，學生便可以借助資訊科技來快速找答案，例如

1. 是不是某個自然數的平方，從40^2、42^2、…去試，便會發現$45^2 = 2025$。如圖 1-1。
2. 是不是某個自然數的立方，從5^3、6^3、… 去試，便會發現它不是任意自然數的立方數，如圖 1-2。甚至學生可以試試自然數的四次方、五次方、…。
3. 是不是前 n 個連續自然數的和，即$1+2+3+\cdots$，便發現它不是前 n 個連續自然數的和，如圖 1-3；但它是前 45 個奇數的和，即$1+3+5+\cdots+89 = 2025$，如圖 1-4。
4. 是不是前 n 個自然數的平方之和，即$1^2+2^2+3^2+\cdots$，便發現它不是前 n 個自然數的平方之和，如圖 1-5。
5. 是不是前 n 個自然數的立方的和，即$1^3+2^3+3^3+\cdots$，便發現它前 9 個連續自然數的立方之和，如圖 1-6。學生也可以試試四、五、六次方數的級數和。

fx =E2^3

B	C
n	n^2
40	1600
41	1681
42	1764
43	1849
44	1936
45	2025
46	2116

圖 1-1 試n^2

fx =E7^3

E	F
n	n^3
10	1000
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375

圖 1-2 試n^3

fx =SUM(H$2:H61)

H	I	J
n	1到n的和	
60	1830	
61	1891	
62	1953	
63	2016	
64	2080	
65	2145	
66	2211	
67	2278	

圖 1-3 試 1+2+…+n

fx =SUM(K$2:K42)

K	L	M
n	前n個奇數和	
81	1681	
83	1764	
85	1849	
87	1936	
89	2025	
91	2116	
93	2209	
95	2304	
97	2401	
99	2500	
101	2601	

圖 1-4 前 n 個奇數和

fx =SUM(O$2:O15)

N	O	P	Q
n	n^2	n^2的和	
14	196	1015	
15	225	1240	
16	256	1496	
17	289	1785	
18	324	2109	
19	361	2470	
20	400	2870	
21	441	3311	
22	484	3795	

圖 1-5 前 n 個 n^2 的和

fx =SUM(S$2:S6)

R	S	T
n	n^3	n^3的和
5	125	225
6	216	441
7	343	784
8	512	1296
9	729	2025
10	1000	3025
11	1331	4356
12	1728	6084

圖 1-6 前 n 個 n^3 的和

諸如上述的方法，學生可去試所有已經學過的相關概念，甚至像三角函數、對數都可以拿來試，便會現某個自然數度數或者自然數弳度的 sin、tan、sec 函數值的前四位小數都不是 2025，如圖 2-1, 2-2。常用對數、自然對數，也一樣，如圖 2-3。

fx =SIN(V8*PI()/180)

V	W	X	Y
n	sin n	tan n	sec n
7	0.1219	0.1228	1.0075
8	0.1392	0.1405	1.0098
9	0.1564	0.1584	1.0125
10	0.1736	0.1763	1.0154
11	0.1908	0.1944	1.0187
12	0.2079	0.2126	1.0223
13	0.2250	0.2309	1.0263
14	0.2419	0.2493	1.0306
15	0.2588	0.2679	1.0353
16	0.2756	0.2867	1.0403
17	0.2924	0.3057	1.0457

圖 2-1　自然數度數的三角函數

fx =SIN(AA8)

AA	AB	AC	AD
n	sin n	tan n	sec n
7	0.6570	0.8714	1.3264
8	0.9894	-6.7997	-6.8729
9	0.4121	-0.4523	-1.0975
10	-0.5440	0.6484	-1.1918
11	-1.0000	-225.9508	225.9531
12	-0.5366	-0.6359	1.1850
13	0.4202	0.4630	1.1020
14	0.9906	7.2446	7.3133
15	0.6503	-0.8560	-1.3163
16	-0.2879	0.3006	-1.0442
17	-0.9614	3.4939	-3.6342

圖 2-2　自然數弳度的三角函數

fx =LOG10(AA2)

AA	AE	AF
n	log x	ln x
1	0.0000	0.0000
2	0.3010	0.6931
3	0.4771	1.0986
4	0.6021	1.3863
5	0.6990	1.6094
6	0.7782	1.7918
7	0.8451	1.9459
8	0.9031	2.0794

圖 2-3　常用對數、自然對數

查表——另類的有系統嘗試錯誤

比較老長的人都有的經驗，在沒有電腦的年代，學生都使用查表的方式來計算其近似值，如圖 3 的角度的度化成弳度時，經過四捨五入後，**11.6° = 0.2025**（弳）（看 11 橫列、0.6 直排的相交處）。

θ (degrees)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0489	0.0506
3	0.0524	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0611	0.0628	0.0646	0.0663	0.0681
4	0.0698	0.0716	0.0733	0.0750	0.0768	0.0785	0.0803	0.0820	0.0838	0.0855
5	0.0873	0.0890	0.0908	0.0925	0.0942	0.0960	0.0977	0.0995	0.1012	0.1030
6	0.1047	0.1065	0.1082	0.1100	0.1117	0.1134	0.1152	0.1169	0.1187	0.1204
7	0.1222	0.1239	0.1257	0.1274	0.1292	0.1309	0.1326	0.1344	0.1361	0.1379
8	0.1396	0.1414	0.1431	0.1449	0.1466	0.1484	0.1501	0.1518	0.1536	0.1553
9	0.1571	0.1588	0.1606	0.1623	0.1641	0.1658	0.1675	0.1693	0.1710	0.1728
10	0.1745	0.1763	0.1780	0.1798	0.1815	0.1833	0.1850	0.1867	0.1885	0.1902
11	0.1920	0.1937	0.1955	0.1972	0 1990	0.2007	0.2025	0.2042	0.2059	0.2077
12	0.2094	0.2112	0.2129	0.2147	0.2164	0.2182	0.2199	0.2217	0.2234	0.2251
13	0.2269	0.2286	0.2304	0.2321	0.2339	0.2356	0.2374	0.2391	0.2409	0.2426
14	0.2443	0.2461	0.2478	0.2496	0.2513	0.2531	0.2548	0.2566	0.2583	0.2600

圖 3、角度的度化成弳度的對照表

資料來源：教育部（1975）。高中數學實驗教材，第三冊自然組再版。

https://reurl.cc/Dq9AWd

也可以從常用對數表中發現**log1.594**經過四捨五入後的近似值是.2025，如圖 4（1.5 橫列 9 排再外加後三排的 4，即 log1.594=.2014+.0011）。

對數表 (1)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16

圖 4、對數表

資料來源：教育部（1973）。高中數學實驗教材，第二冊初版。

https://reurl.cc/6K2QDy

假如學生能運用學到的基本數學知識，有系統的嘗試錯誤，他便會展現很多可能的思考、過程、結果的流暢性（找尋很多可能的答案）；從知識的轉換中展現不同思考方式或者不同類型答案的變通性（從不同數學概念中找尋答案）；甚至發現他人沒有發現的獨特思考或者結果的獨創性（和別人不同的算式，尤其是別具意義的算式，類似$(20+25)^2$和 2025 有關的算式）。

使用數學知識進行分析

想要進行創新，學生**有意識的使用已學到的較為深入的數學知識**是很重要的。它可以節省學生嘗試錯誤的時間浪費，變得更有效率，甚至可以找到更多的答案。但是在此過程中，系統性的嘗試錯誤仍然扮演重要的角色。

1. 我們可以先對 2025 進行因分解，發現$2025=3^4\times5^2$，因此我們可以很快發現它是一個（完全）平方數45^2；同時 45 也可以因數分解，因此也可以是二個（完全）平方數的乘積$5^2\times9^2$，甚至是$3^2\times15^2$。假如我們對 45 進行解析便會發現它可以是許多二數和為 45 的平方，只是其中最為特別且和 2025 有關的是$(20+25)^2$。甚至西元 1985 年出生的人，現年 40 歲，可以自豪的說我出生的西元年後二位數與年齡差的平方是 2025：$(85-40)^2=2025$。

2. 因為 2025 的因數分解不是某數一個三、四、五、...的次方，因此不用試也就知道不存在某個自然數的三、四、五、... 次方是 2025。

3. 因為 2025 是一個（完全）平方數，國中生又學過畢氏定理，因此可以從此概念找尋可能的答案。其中國中最為熟知的是$3^2+4^2=5^2$，因此兩邊同乘9^2，便得到$27^2+36^2=2025$。甚至去試k（m^2-n^2），$2kmn,k$（m^2+n^2）的畢氏三元素組。

4. 有了畢氏定理，學生也可以試試三個數的平方和，但因為它沒有公式，因此只能嘗試錯誤的去找，或者先給定二數，再求第三數是否為平方數，或者從$2025=3^4\times5^2$的分解去找是否有三、四、...個數的平方和為3^4、$3^2\times5^2$，之後再乘以5^2或3^2，以簡化問題。結果會發現$4^2+28^2+35^2=2025$，$5^2+8^2+44^2=2025$，$5^2+20^2+40^2=2025$（還有其他的三數平方和）。當然，學生也可以使用此方式去試四、五、六、...個平方數的和是否為 2025，便會發現$4^2+21^2+28^2+28^2=2025$；$10^2+20^2+25^2+30^2=2025$；$12^2+16^2+20^2+35^2=2025$（還有其他四、五、六、...個數的平方和）。

5. 國中生會學到等差級數和，它的公式是$\frac{(2a_1+(n-1)d)\times n}{2}$（其中$a_1$是首項，d 是公差，

n 是項數)，或者$\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$（其中$a_1$是首項，$a_n$是末項，n 是項數)。

(1) 我們可以結合 2025 因數分解的結果，發現$(2a_1+(n-1)d)\times n=4050$，若取第一項和公差都是 1(即連續前 n 個自然數和)，此時$(2+(n-1)\times 1)\times n=n\times(n+1)=n^2+n=4050$，再使用一元二次方程式求解（或其它方法)，發現沒有整數解。

(2) 若將等差級數的第一項取 1、公差取 2（即連續前 n 個奇數和)，此時$(2+(n-1)\times 2)\times n=2n^2=4050=2\times 3^4\times 5^2$，再使用一元二次方程式求解（或其它方法)，發現 n=45，即前 45 個奇數和$1+3+5+\cdots+89=2025$。

(3) 若我們了解任何奇數項的等差數列，以最中間項為準，第前 m 項與第後 m 項之和為中間項的 2 倍，或者任何偶數項的等差數列，以最中間二項為準，第前 m 項與第後 m 項之和為中間二項之和。又發現$2025=3^4\times 5^2$，此時我們可以創造出許多的差等數列。例如$2025=3\times$（$3^3\times 5^2$)，可以造出（$3^3\times 5^2-1$）+（$3^3\times 5^2$）+（$3^3\times 5^2+1$）$=674+675+676=2025$；也可以造出（$3^3\times 5^2-2$）+（$3^3\times 5^2$）+（$3^3\times 5^2+2$）$=673+675+677=2025$。$5\times$（$3^4\times 5$)，可以造出（$3^4\times 5-2$）+（$3^4\times 5-1$）+（$3^4\times 5$）+（$3^4\times 5+1$）+（$3^4\times 5+2$）$=403+404+405+406+407=2025$。

(4) 除了（3）的方法，因為等差級數有三個未知數a_1、d、n，因此我們也可以使用嘗試錯誤的方法先假設a_1、d，再利用一元二次方程式求 n 的解。例如，發現$a_1=2$、$d=13$時 n=18（(3) 的方法中，最前、後二項和為$3^2\times 5^2=225$)，即首項為 2，公差為 13 的前 18 項和$2+15+28+\cdots+223=2025$；發現$a_1=2$、$d=19$時 n=15（(3) 的方法中，最中間項為$3^3\times 5=135$)，即首項為 2，公差為 19 的前 15 項和$2+21+30+\cdots+268=2025$。

6. 假如學生結合等差數列，以及（完全）平方數概念，便可以發現（$1+2+3+4+5+6+7+8+9$）$^2=2025$

7. 假如學生學過等比級數和的公式$\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$（其中a_1是首項，r是公比，n 是項數)，學生也可以試試是否存在。

8. 假如學生學過$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$，再使用嘗試錯誤，或者利用公式找尋從 m+1 開始連續 n-m 個平方數的和，是否為 2025。

9.　假如學生學過$1^3+2^3+3^3+\cdots n^3=\left(\frac{n\times(n+1)}{2}\right)^2$，再使用嘗試錯誤，或者利用公式找尋，便會發現$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3=2025$。

假如讀者學過其他的數學公式，讀者也可以試試是否和 2025 有關。

結語

作者撰寫本文的主要目的是希望所有的學生能學到一種自己可以獨立創新的方法，再利用此方法創新任何的事物。作者認為，想要數學創新，一些相關的經驗、相關的數學學習都是重要的元素，之後再利用系統性的嘗試錯誤，以及有意識的運用更高層次的數學的策略，才能流暢的思考許多的可能性，才能變通的變換不同數學概念，也才能獨創別人沒想到的事物。相信任何一位學生了解、活用這樣的經驗與策略，都有機會做到數學創新。

李源順

臺北市立大學數學系 名譽教授

附件

網站上與 2025 年有關的算式

2025 will be an interesting year!

1. 2025 is a ***perfect square***.

$$45 \times 45 = 45^2 = 2025$$

2. The ***last perfect square year*** is 1936; the ***next one*** is 2116.

$$44 \times 44 = 44^2 = 1936$$

$$46 \times 46 = 46^2 = 2116$$

3. 2025 is a ***product of two squares***.

$$(9 \times 9) \times (5 \times 5) = 9^2 \times 5^2 = 2025$$

4. 2025 is a ***sum of two perfect squares***.

$$(27 \times 27) + (36 \times 36) = 27^2 + 36^2 = 2025$$

5. 2025 is a ***sum of three squares***.

$$(40 \times 40) + (20 \times 20) + (5 \times 5) = 40^2 + 20^2 + 5^2 = 2025$$

6. 2025 is the ***sum of cubes of all the single digits from 1 to 9***.

$$\sum_{n=1}^{9} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2025$$

7. 2025 is the ***square of the sum all of single digits from 1 to 9***.

$$\left(\sum_{n=1}^{9} n\right)^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 2025$$

8. 2025 is the ***sum of the first 45 odd numbers***.

$$\sum_{n=1}^{45} (2n - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 89 = 2025$$

may y'all have a blessed and joyful new year! regards from River Villanueva :>

資料來源：https://x.com/ordjingle/status/1874586219499421974?mx=2

參考資料

[1] Ervynck, G. (2002). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp.42–53). Springer.

[2] Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 129–145). Brill.

[3] Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29(3), 75-80.

[4] Sriraman, B.(2005). Are Giftedness and Creativity Synonyms in Mathematics? The journal of Secondary Gifted Education, XVII(1), 20-36.

[5] 維基百科（2025）。創造力。2025.01.12 檢自 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/創造力。

[6] 教育部（1975）。高中數學實驗教材，第三冊自然組再版。教育部。https://drive.google.com/file/d/1c1zHnyOiGb_776xLexh4pGVqVcCRu2T0/view

[7] 教育部（1973）。高中數學實驗教材，第二冊初版。教育部。https://drive.google.com/file/d/1bCa2Liiko8yPpS_p0TIbeoEo37xkZsEe/view

[8] 師大數學教育中心（2022）。21 世紀技能的說明與操作型定義。會議資料。