

# 以分數基本概念培養學生系統性思考技能初探

文／詹明霞、李源順



## 前言

學生在學習的過程中，能有系統性的連結現在所學與以前所學概念／方法，可以讓學生的學習形成一個整體的概念，形成數學感。本文旨在複習學生已學過的單位分數概念，並抽取出分數重要基本概念：平分，大、小單位的關係與轉換，形成系統性思維，進而推廣至一般真分數概念，最後形成性評量學生的表現。希望學生能形成分數概念的系統性思維，了解不管單位分數、真分數、假分數，它們的基本概念相同，甚至分數四則運算也都是使用基本概念來說明，進而學得數學感與帶得走的能力。

介紹分數概念時，中文對於物品的數量稱呼有許多不同的量詞，例如 6 顆／粒／個蘋果，2 個／盒／塊／片／份蛋糕。但是英文很少有類似的量詞，例如 6 apples, 2 cakes。因此中文的分數基本概念，例如，「 $\frac{3}{8}$  盒蛋糕，是指一盒蛋糕平分成 8 份，3 份是  $\frac{3}{8}$  盒蛋糕」，學生能了解問題使用的單位量詞是在「一盒平分成 8 份」的前提下，用小單位（份）計數蛋糕，它有 3 份，改用大單位（盒）計數就是有 3 個  $\frac{1}{8}$  盒，也就是  $\frac{3}{8}$  盒。從例子中，李源順（2025）認為在華語體系，分數的概念可以用「（一）平分，（二）大、小單位的關係（1 盒平分成 8 份）和轉換（3 份就是  $\frac{3}{8}$  盒）」說明分數概念。這就好像 200 公克的物品，若改用比「公克」較大的單位「公斤」來說，就是  $\frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$  公斤。再者李源順認為儘量不要用「一盒蛋糕平分成 8 份，其中的 3 份就是  $\frac{3}{8}$  盒」，因為在真分數中使用「其中」不會有問題，但推廣到假分數時，就會覺得怪怪的。

台師大數學教育中心定義系統性思維是「找元素、找關係、建系統」。有關分數基本概念的系統性思維，平分、大小單位是學生要找的元素，大小單位的關係是學生要找的關係，利用大小單位的轉換形成分數概念是學生要建的系統。李源順（2025）希望學生最後能形成整個分數學習的系統性思維，此時的（找）元素是分數基本概念、四則運算概念性知識，（找）關係是所有四則運算的概念性解釋都和分數基本概念有關，（建）系統就是整個分數四則運算的概念性解釋都是一致的體系。

## 複習單位分數的意義與畫圖：準備活動

一開始教師提問：「小朋友，還記得嗎？二年級學過單位分數。說說看，你記得什麼是單位分數嗎？」學生回答：「二分之一、四分之一、六分之一」等。接著，老師追問：「四分之一的意思是什麼呢？請小朋友舉例說說看。」學生回答：「就是分成四份、四份其中的一份。」「我把 1 塊蛋糕平分成 4 塊，其中 1 塊是 $\frac{1}{4}$ 塊披薩。」等。老師發現，學生在溝通時，很少察覺需要平分和大、小單位，而且單位混用。這是學生學習分數的常見障礙。

於是老師揭示圖一，同時提問「有一個蛋糕，平分成 4 份，塗色的部分，哪一個代表四分之一個蛋糕？」

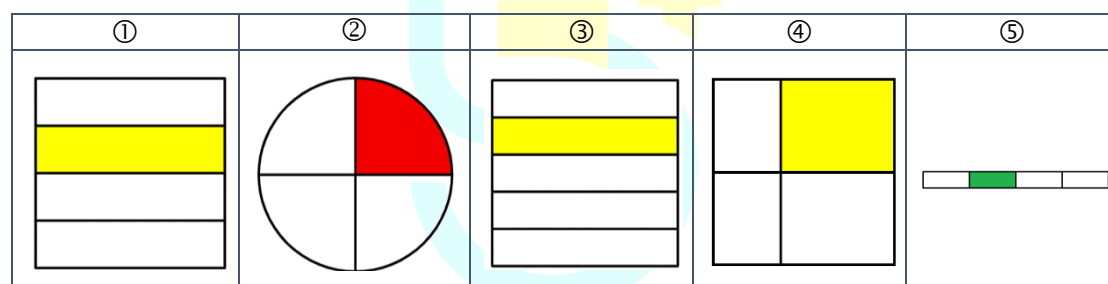


圖1、分數表徵判斷圖示

學生說「①、②、⑤的圖是四分之一個蛋糕」；「③的圖不是四分之一個蛋糕，因為它分成 5 份」；「④的圖不是，因為它的每一份沒有一樣大」。可見學生在圖示的判斷上能注意到是否平分，以及部份／全體關係。

為了讓學生注意到大小單位的關係，老師和學生「口語討論」蛋糕的單位要依據題目「對一個蛋糕來說，1 份蛋糕指的是平分成 4 份後其中的 1 份，是 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕」。再觀察圖形，「1 份蛋糕比較大還是 1 個蛋糕比較大？」、「塗色部分是蛋糕其中的 1 份，1 份是小單位，1 個是大單位，不能說 $\frac{1}{4}$ 份蛋糕，要說是 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕」。

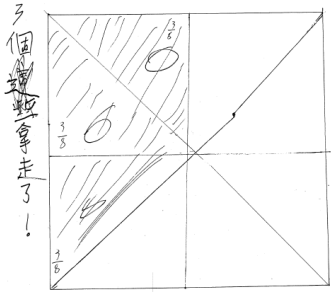
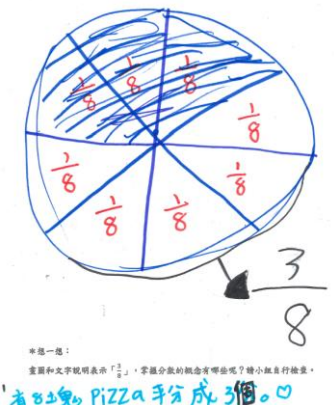
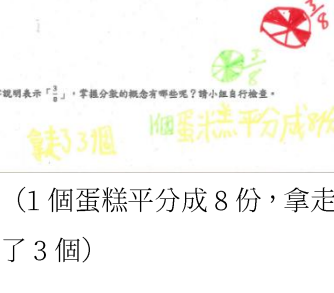
## 概念推廣為真分數：發展活動

### 一、 $\frac{3}{8}$ 的概念發展

老師相信，學生可以順利從單位分數概念推廣到真分數概念，將單位分數基本概念的系統（平分，大小單位的關係）應用到真分數概念（多了大小單位的轉換）。於是複習了「 $\frac{1}{4}$ 」的意義之後，老師請小朋友「猜猜看 $\frac{3}{8}$ 是什麼意思？」並發下紀錄單請小朋友舉例、畫圖說說看。

或許是先前只進行口語討論，學生只是聽到，並沒有太多學生「看到、意識」到重要的平分、大小單位的關係和轉換。也或許是學生先前並不習慣於以書寫文字來舉例說明，因此學生的文字書寫並不是很完整，如圖二。所以老師在黑板上貼上剛才忘了放大後設認知的教學重點的文字提示「平分」、「大、小單位」，試圖讓學生看到分數基本概念的重要元素。

從圖二可以發現，只有④組學生能完整的寫出分數的基本概念：平分、大、小單位的關係、大、小單位的轉換。⑤組學生能寫出平分，大小單位的關係，但單位轉換時出了問題。②③二組學生只能寫出平分，同時大小單位不清，甚至語意不清。①一組沒有寫出分數的重要概念，簡單的寫 3 個拿走了。

①	②	③
		
<p>學生沒寫出平分，大、小單位，只寫出 3 個拿走了</p>	<p>學生有平分概念，但大小單位搞混，且語意不清。</p>	<p>學生有平分概念，但大小單位搞混。</p>
④		⑤

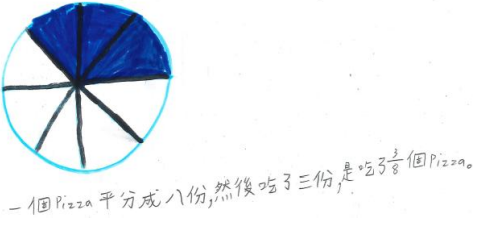
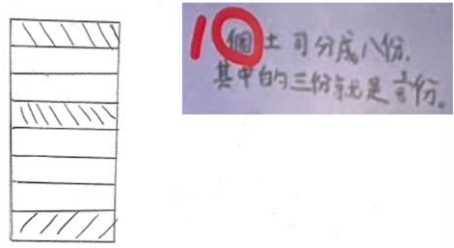
	
<p>學生能寫出平分,大小單位關係(一個平分成8份),大小單位轉換(吃了3份是吃了<math>\frac{3}{8}</math>個)。</p>	<p>學生能寫出平分,大小單位關係,但大小單位轉換有問題(3份是<math>\frac{3}{8}</math>份)。</p>

圖2、學生推廣單位分數概念的舉例與圖示

針對⑤組的討論如下：

老師問：「吐司本來的單位是什麼？」

學生說：「一個吐司」。

老師問：「其中的三份就是八分之三份？有沒有哪裡怪怪的？」

學生說：「八分之三份應該改成八之三個」

老師的教學發現，雖然學生能順利將單位分數推廣為真分數，但是要清楚的說出平分，大、小單位的關係，以及大、小單位的轉換並沒有想像中的容易。因此課堂中做了概念的澄清。

## 二、 $\frac{2}{6}$ 的形成性評量

為了檢驗老師的教學以及學生的學習成效，老師發下紀錄單，請小朋友（個人）畫圖並用文字舉例寫出 $\frac{2}{6}$ 的意思。

教學分析發現，21名學生中，只有3名學生能完整的寫出分數的基本概念：平分、大、小單位的關係、大、小單位的轉換。有6名學生有寫出平分，但大、小單位都一樣。有4名學生沒有寫出「平分」或未寫出單位。有3名學生畫圖有平分，但沒有說明或者只寫「拿走2份」。有3名學生的「圖形沒有等分且沒有文字舉例說明」。示例如圖三。

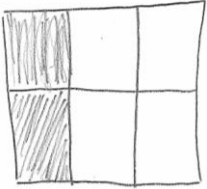
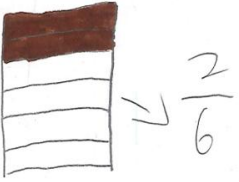

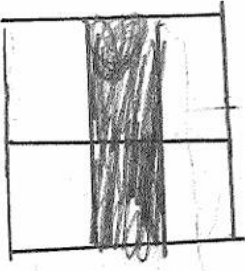
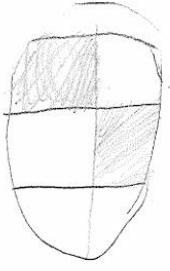
<p>有一個蛋糕，把他平分成6份， 拿走其中的2份，是拿走了 <math>\frac{2}{6}</math>個蛋糕。</p> 	 <p>一個蛋糕平分成6塊 吃了2塊</p>	 <p>有一個蛋糕吃了2塊 =是吃了<math>\frac{2}{6}</math>個蛋糕</p>
<p>分數概念完整</p>	<p>有平分，但大小單位相同</p>	<p>沒有寫出平分</p>
	 <p><math>\frac{2}{6}</math></p>	
<p>畫圖有平分，但沒說明或寫 拿走2份(個)</p>	<p>圖形沒有平分且沒有說明</p>	

圖3、學生的形成性評量示例

## 教學檢討與反思

歷年的教學經驗發現，教科書建議使用二節課以上的時間來進行分數基本概念的教學，同時學生的學習成效一直不佳，學生不是沒有使用量的概念，就是缺少平分，或者單位混淆。作者反思，雖然教學發現學生能自行創新、發現也會有 $\frac{9}{6}$ 的分數，並舉例說明就是一個蛋糕平分成6份，9份就是 $\frac{9}{6}$ 個蛋糕，但仍出現上述的學習問題。

本次教學試圖利用一節課的時間進行分數基本概念的教與學，教學發現仍然無法順利使更多學生建立完整的分數基本概念的系統性思維。事後的檢討如下：

### 一、如何在更短時間內讓更多的學生建立基本概念

因為全班學生的學習成就不一、學生的學習有時間差與路徑差，因此任何一位教師不可能在一節課或二節課的教學過程中，讓全班的學生鞏固的建立分數基本概念。作者認為一位老師如何在更短時間內，讓更多的學生建立基本觀念才是老師應該追求的目標。

至於那些還沒建立基本概念的學生，可以在日後的分母分數加減、...等等與分數

相關的課程，再讓這些學生藉由都是使用分數基本概念來解釋的過程，複習、建立他們的基本概念與能自我展現基本概念的應用，最終使所有的學生都有機會學得有數學感、有系統性。

## 二、畫圖的教學問題

有老師認為可先出現已經平分好的圖形讓學生表徵分數概念以降低學生的學生困難，這是可行的教學方式之一，但最終還是要學生自行畫圖。在學生自行畫圖的過程發現，若是分母為 2, 4, 8 學生的畫圖是沒有困難的；只有在分母不是 2 的次方數時，例如 6 時，使用圓形表徵會出現沒有平分的情形。因此老師如何讓學生了解在分母不是 2 的次方數的情形下，如何等分圓形，或者能彈性的改變圓形為方形表徵，是老師要讓學生自行畫圖時，必需放大處理的教學問題。

也有老師談到，學生應該利用直尺來畫圖比較能平分，單純使用筆畫圖很難判斷是否平分；這也是好的建言。三年級學生還不習慣使用圓規，因此用直尺畫圖，可能會少掉學生習以為常的圓形表徵。同時分數基本概念的教學，畫圖只是想要表徵想法而已，學生還是要有只用筆畫圖的經驗。因此老師在教學過程中，仍然要放大處理以圓形畫分母不是 2 的次方數的問題，一則讓學生了解如何將圓形 3, 5, 6, ... 等分的方法，二則要培養學生能彈性使用圓形、方形、線段畫圖的能力，三則要讓學生了解只用筆畫圖時，只要看起來有平分即可的問題，因為我們是理想化的在了解平的概念（用直尺畫圖時，有時也無法真正平分）。

## 三、分數基本概念的後設認知

作者在教學時，發現和學生討論是否有平分；沒有直接點出有二個不同的單位、沒有和學生討論二個單位的不同與關係；僅止於和學生討論老師問：「其中的三份就是八分之三份？有沒有哪裡怪怪的？」而讓少數學生說出：「八分之三份應該改成八之三個」的策略，似乎無法讓更多的學生意識到、深刻的了解分數基本概念。

因此作者反思，放大討論「一個蛋糕平分成八份，三份就是八分之三個蛋糕」這一句話中，要注意到「平分」，「有大、小二個單位，它們分別是什麼（個、份）」，「這二個大、小單位和你平常說的單位一樣嗎？」，「不一樣的時候要注意題目用什麼單位，要和題目的單位相同，在說、寫的時候要小心」，「這二個單位之間的關係是什麼（一個平分成八份）」，「用小單位來說是多少（三份），改用大單位來說是多少（八分之三個）」，「所以我們要注意到：有沒有平分，大小單位的關係，小單位是多少換成大單位來說又是多少」讓學生有後設認知的學習機會，或許能使更多的學生在更短的時間內，建構好紮實的分數基本概念。

#### 四、善用各種教、學策略

除了上述的後設認知之外，作者覺得一開始的教學讓全體學生耳（朵聽）到、眼（睛看）到、口到（嘴巴說出來）、手到（寫下來），是必要的教學策略。因此在討論清楚分數基本概念之，不妨把它完整、清楚的寫在黑板上，同時善用二人一組相互說給對方聽，或者二人一組，其中一人出一個分數，另一個人舉例說出該分數的意義，並適時寫下來相互檢查。也提醒學生可以不看黑板的重點就不要看、無法說出來時可以看，使更多的學生有機會說得出來。同時老師可以設法評量有多少學生已經建立基本概念了，必要時多出幾個例子進行教學，例如一節課的教學效果不佳，第二節課再進行更深入的教、學。相信善用這樣的策略可以在更短的時間讓更多的學生建立概念。

詹明霞

臺北市萬興國小教師

李源順

臺北市立大學數學系名譽教授

#### 參考資料

- [1] 李源順（2025）。理解量詞差異，掌握分數概念。國語日報，2025.02.05。