一面兩體——正方體與等面四面體的多義展開圖

文／張惟淳、袁靜娟、翁條雄、張圓淇、許恬瑜、曾姮潔

前言

小學的時候，我們一定學過「正方體的展開圖」的製作方法：將一個正方體沿著稜邊剪開，就可以得到一個六個正方形相連的圖形；同樣地，將六個正方形以特定方式相接，就可以摺成一個正方體。

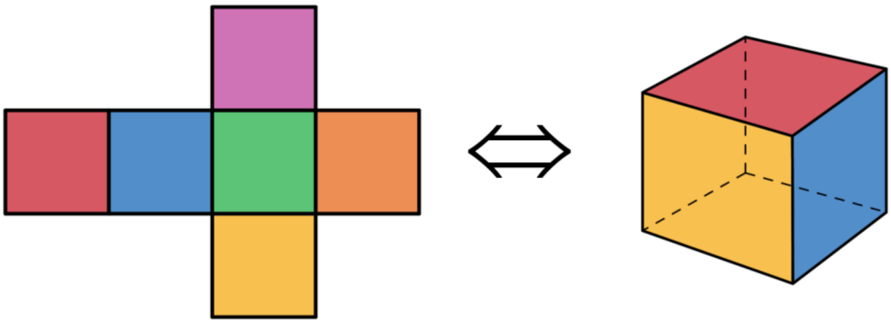


圖1、正方體的展開圖

不過，試想看看，如果我們將圖 1 中的「十字架」換個方式摺，故意不沿著正方形的邊摺製，是不是可以做出不同的立體圖形呢？

例如，我們試著使用圖 2 的摺法：

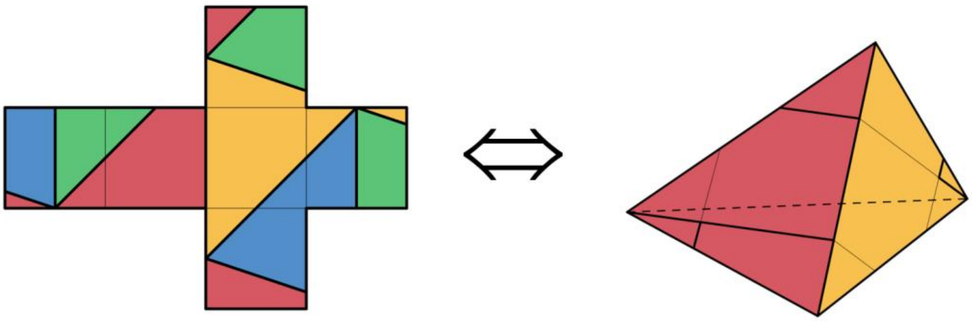


圖2、將正方體的展開圖摺成四面體

您看，竟然變成一個三角錐了！是不是非常有意思呢？

為什麼可以這樣摺？是巧合嗎？還是有什麼特殊的技巧呢？讓我們一步一步揭開「多義展開圖」的神秘面紗吧！

在開始說明如何摺製三角錐之前，我們要先準備好一些預備知識。

P2 鑲嵌

「鑲嵌」(tessellation)指的是用同樣的圖形，不斷重複、不交疊且毫無空隙地鋪滿整個平面 [1]。鑲嵌的圖形千變萬化，生活周遭的地磚、布料以及藝術品，都處處可見鑲嵌的蹤跡。

數學家們針對一些符合特定模式的鑲嵌做了研究，分類為17 種壁紙群 [2](wallpaper group)。這裡特別針對其中一種「P2」鑲嵌做個簡介。

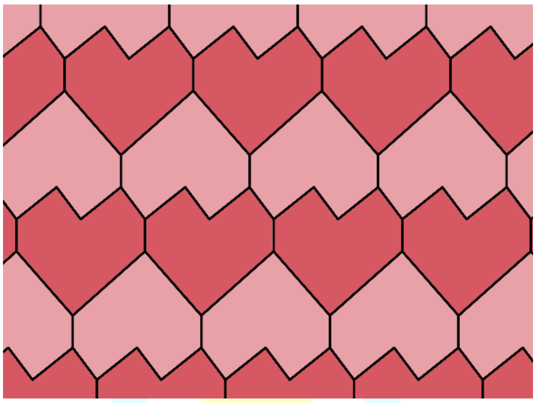
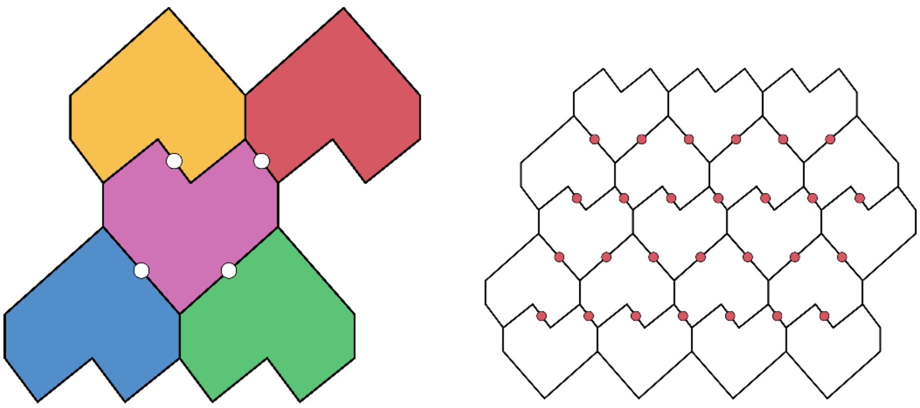


圖3、「愛心」圖樣所組成的 P2 鑲嵌

所謂的 P2 鑲嵌，簡而言之，就是一個圖樣與它旋轉180°後的反向圖樣合在一起，可以鋪滿整個平面。這種模式的鑲嵌，會有一種有趣的特性。

觀察圖 4(a)，在中心紫色的正向愛心的邊界上取 4 個點，並將它各別以 4 個點為中心旋轉180°，就會成為周圍的 4 個反向愛心。這代表說，P2 鑲嵌的構成模式就是以其中一個圖形出發，不斷旋轉180° 所構成的，而且每片圖形相對於周圍鄰接的反向圖形，都恰好會有 4 個旋轉中心 [3]，如圖 4(b)。



(a)　　(b)

圖4、P2 鑲嵌的旋轉中心

到這裡為止，不知道您是否對於 P2 鑲嵌有了初步的認識？筆者在備註放了一個練習[4]，試過後相信您對 P2 鑲嵌的 4 個旋轉中心會有更深刻的理解！

回歸正題，您現在應該會產生一個疑問，我們不是要摺三角錐嗎？怎麼突然玩起鑲嵌來了呢？在此先透漏一個秘密：圖 4 中的單個愛心，本身就是一個三角錐的展開圖！讓我們繼續看下去。

等面四面體的展開圖

文章前面提到的三角錐，嚴格來說，應該稱之為等面四面體（isohedral tetrahedron），也就是由四個全等的三角形[5]所組成的四面體，如圖 5(a)。而圖 5(b)中只有三個三角形全等，它就不是等面四面體。

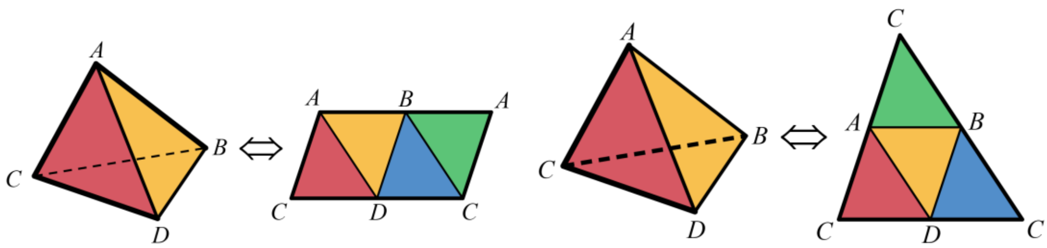
(a) 等面四面體的示例　　(b) 非等面四面體的示例

圖5、等面四面體 / 非等面四面體

我們現在取一個等面四面體 $A-BCD$，將它的四個面染上四個不同的顏色。接著，用兩種方式沿著它的邊剪開，會得到兩種不同類型的展開圖：

(a) 沿著 $\overline{BA}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{CD}$ 剪開，得到的是「平行四邊形 type」的展開圖。

(b) 沿著 $\overline{CA}$ 、$\overline{CB}$ 、$\overline{CD}$ 剪開，得到的是「三角形 type」的展開圖。



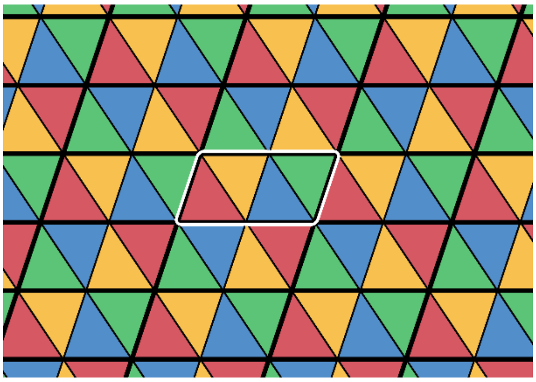
(a) 平行四邊形 type　　(b) 三角形 type

圖6、等面四面體的展開圖

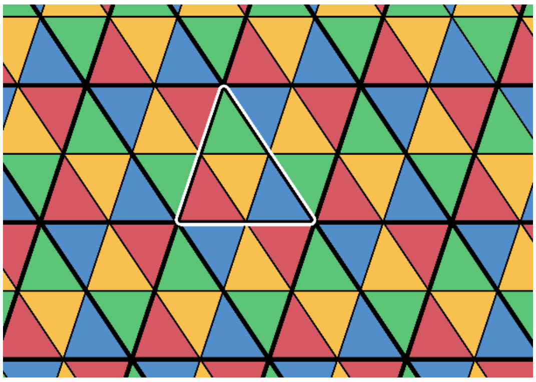
比較圖 6 的兩種展開圖，可以發現兩者的差異僅為綠色的ΔABC的位置，就像是以 B 點為中心逆時針旋轉$180°$（圖 6(a)→圖 6(b)）。

嗯？旋轉180°？這句話有沒有一點熟悉？這不正是 P2 鑲嵌的產生方式嗎？

現在我們對兩種展開圖都執行同一個動作：將展開圖以 A、B、C、D 四個點旋轉180°，宛如 P2 鑲嵌一般不斷製造周圍的圖形，我們就會得到圖 7 中的兩種鑲嵌圖形：



(a) 等面四面體的示例



(b) 非等面四面體的示例

圖7、展開圖的鑲嵌

仔細觀察這兩種鑲嵌，我們可以得到幾個性質：

(1) 等面四面體的展開圖，可以拼合成鑲嵌圖形。[1] [2]

(2) 等面四面體的不同類型展開圖，拼合的鑲嵌圖形會完全相同。

(3) 同一個顏色的面在鑲嵌圖形中的位置，就是以頂點為中心旋轉180°，每六個就會形成像是六芒星一般的圖案[6]。

這些性質代表著一件非常精彩的結論：

將展開圖中的色塊，以頂點為中心旋轉180°到其他同色的色塊中，形成的圖形依然是個等面四面體的展開圖！

這是什麼意思呢？請看以下解說：

我們現在修改「平行四邊形 type」的裁剪法，見圖 8：

(1) 請你觀察左邊的立體圖形，沿著 $\overline{AB}$ 剪開 $\xRightarrow{\text{修改為}}$ 在黃色ΔABD的 $\overline{AB}$ 邊上剪出一個圓弧，留下黃色弓形在ΔABC的 $\overline{AB}$ 邊上。

接著請你觀察右邊的展開圖，這個動作可以看成將黃色弓形以 B 點為中心旋轉180°後，貼合ΔABC。

(2) 請你觀察左邊的立體圖形，沿著 $\overline{CD}$ 剪開 $\xRightarrow{\text{修改為}}$ 在紅色ΔACD的 $\overline{CD}$ 邊上剪出一個三角形，留下紅色三角形在ΔBCD的 $\overline{CD}$ 邊上。

接著請你觀察右邊的展開圖，這個動作可以看成將紅色三角形以 D 點為中心旋轉 $180°$ 後，貼合 ΔBCD。

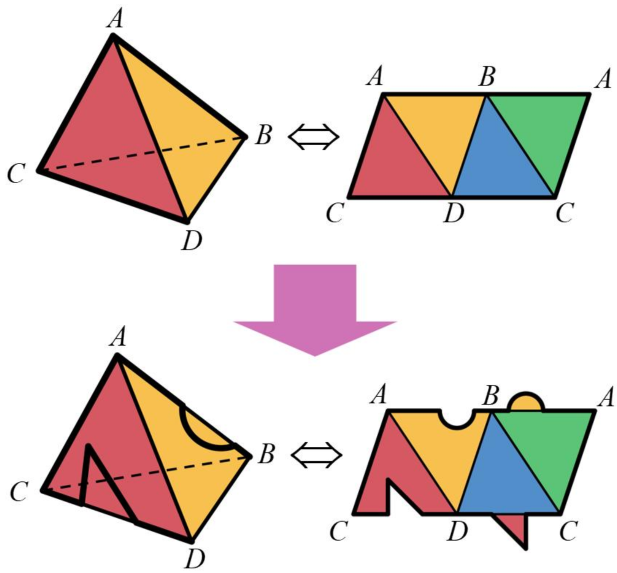


圖8、改造展開圖

所以，沿著面剪開等面四面體的動作，會等價於將展開圖中的色塊進行旋轉的動作。利用這個技巧，可以做出許多有趣的圖案[4]，請您自己嘗試看看。

有了以上這些知識，您應該可以認知到：將等面四面體以特定的方式剪開後，可以得到各式各樣的圖樣，例如——圖 2 的十字架。但是最大的問題在於「反向操作」，如果一個圖樣上面沒有預先塗色或是畫好摺痕，要怎麼知道它是不是等面四面體的展開圖呢？

「P2 鑲嵌」就是「等面四面體」

我們將圖 9 中改造後得到的奇形怪狀展開圖，仿造圖 8 的方式，以四個角的頂點為中心不斷旋轉 $180°$ 後，可以得到下圖的鑲嵌圖形。

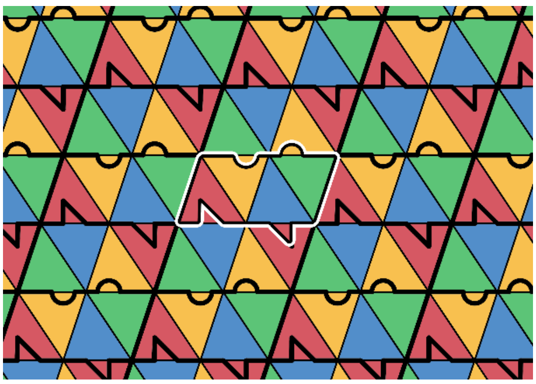


圖9、改造展開圖形成的鑲嵌圖形

仔細觀察上圖，這不就是 P2 鑲嵌嗎？是的，任何一個等面四面體的展開圖，必定可以鋪滿平面成為鑲嵌圖案，而且必為 P2 鑲嵌。

根據前面的鋪陳，我們細想一下：如果一個等面四面體的展開圖是 P2 鑲嵌的單片圖樣，那反過來說，所有的 P2 鑲嵌的單片圖樣不就都是等面四面體的展開圖嗎？

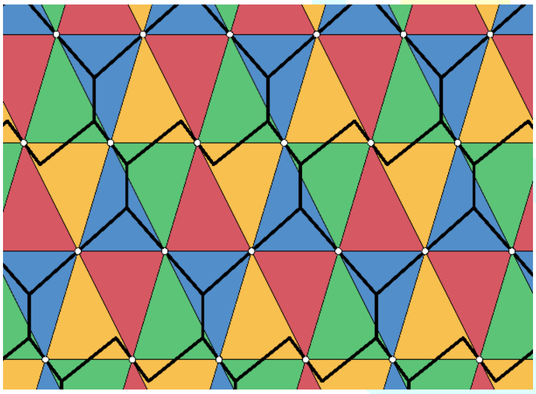
是的！數學家已經證明了以下的結果：

一個等面四面體的展開圖，必可密鋪成 P2 鑲嵌。

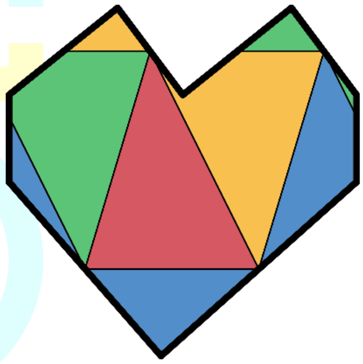
反之，一個可形成 P2 鑲嵌的圖樣，必為某個等面四面體的展開圖。[3] [7]

有了上述的結論，我們現在拿圖 4 中的愛心圖樣來實際操作看看：

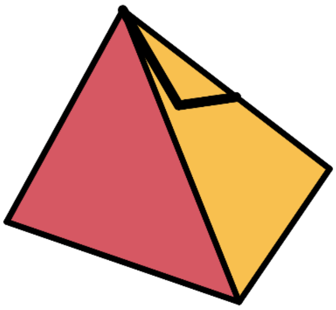
將愛心的 P2 鑲嵌中的旋轉中心連線，劃分成三角形的網格，並且以六芒星的方式塗上四種顏色，此時每一個愛心就可以依照塗好的顏色摺成四面體了！



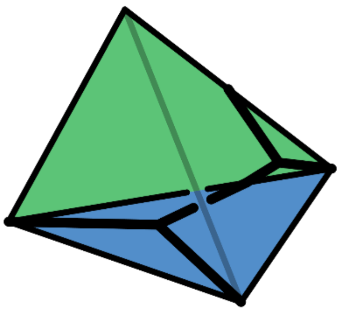
(a) 將 P2 鑲嵌劃分三角形格網並染色



(b) 單片愛心摺四面體的展開圖



(c) 摺成四面體後，紅、黃面的外觀



(d) 摺成四面體後，藍、綠面的透視圖

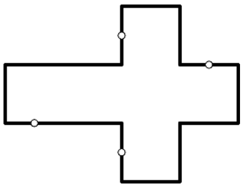
圖10、愛心四面體

至此為止，我們現在已經具備了將 P2 鑲嵌轉化為等面四面體展開圖的技術，代表我們只要檢查：是否每種正方體展開圖都是 P2 鑲嵌呢？如果是的話，那必然就可以將它摺成四面體了！

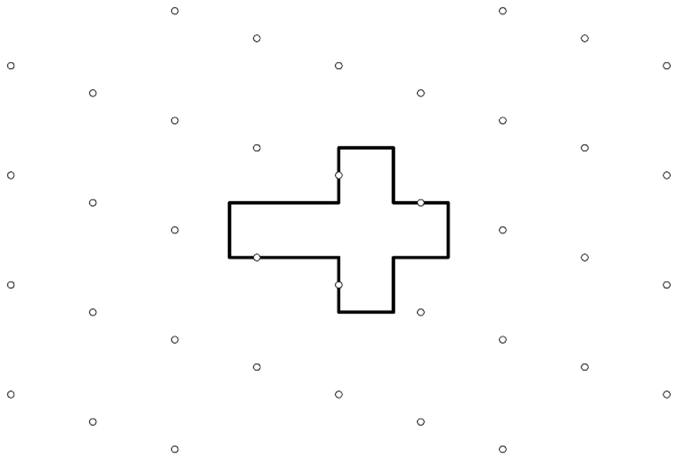
正方體展開圖

我們前面鋪陳了這麼多的知識，就是為了文章一開始的主題——將正方體的展開圖摺合成四面體。這裡用圖 1 的經典十字架展開圖為例，以下是詳細的製作流程：

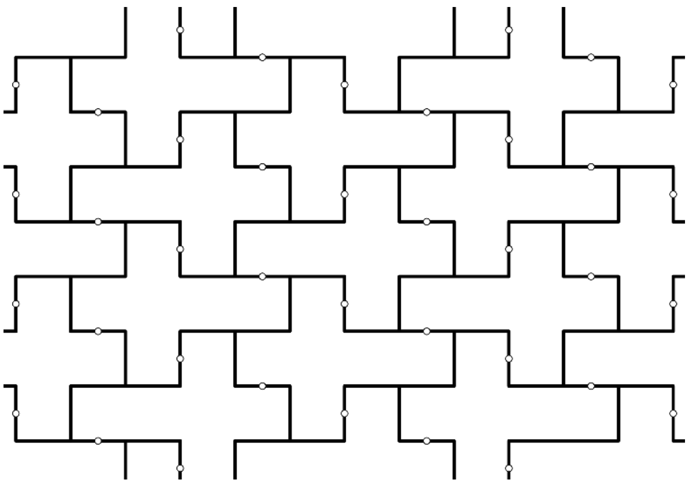
1.
在圖樣的邊緣選取四個旋轉中心，值得注意的是：這四個點必須為某個平行四邊形的頂點。



2.
將旋轉中心鋪排成陣列，這些點會是一個三角形網格的頂點。

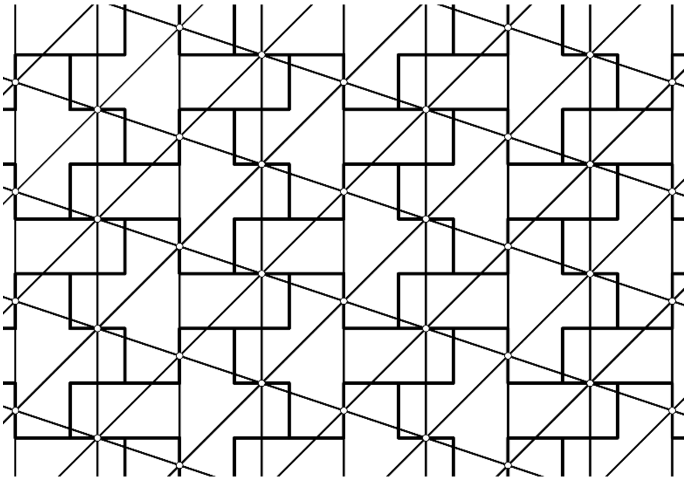


3.
將圖樣以這些點為中心旋轉 180° ，逐步形成 P2 鑲嵌，我們這個時候就可以確定這個圖樣一定可以摺成四面體了！



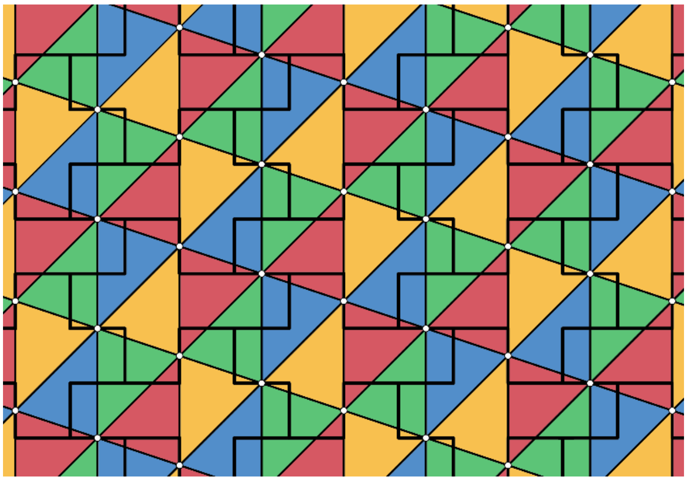
4.

將旋轉中心連線，形成三角形網格。



5.

依照六芒星法，將三角形塗上四個顏色。



6.

選取其中一個圖樣，展開圖便告完成囉！如果想要做成實體的話，只要以四色的三角形為底，留下可以支撐的部分即可。

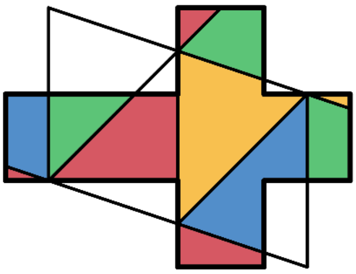
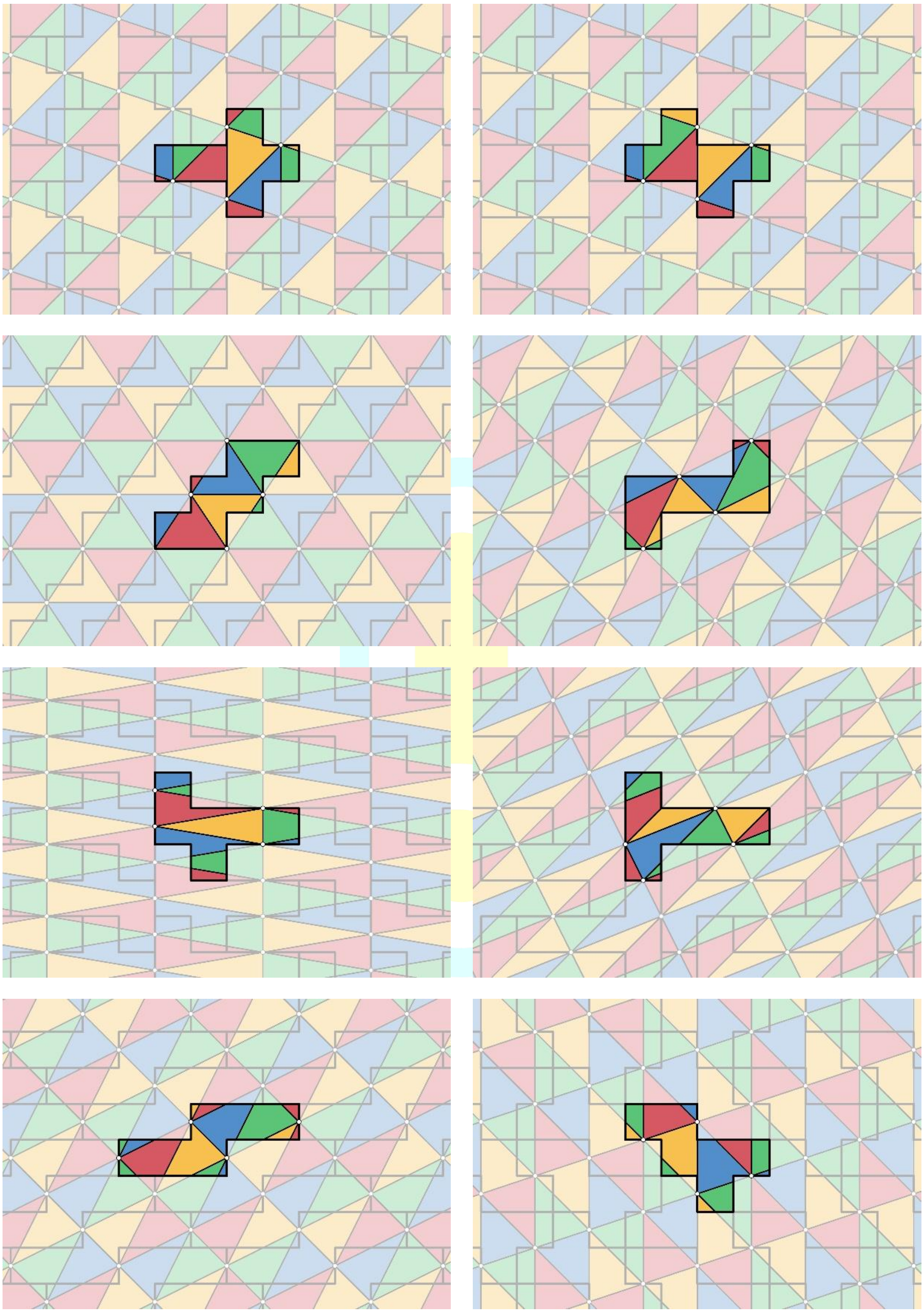


圖11、正方體展開圖摺合四面體的製作流程

以上，就是將十字架摺成四面體的方法。

那麼，正方體展開圖共有 11 種，這些展開圖通通可以組合成 P2 鑲嵌嗎？令人開心的是：全部都可以！

我們把 11 種展開圖的鑲嵌與摺法列在下面：



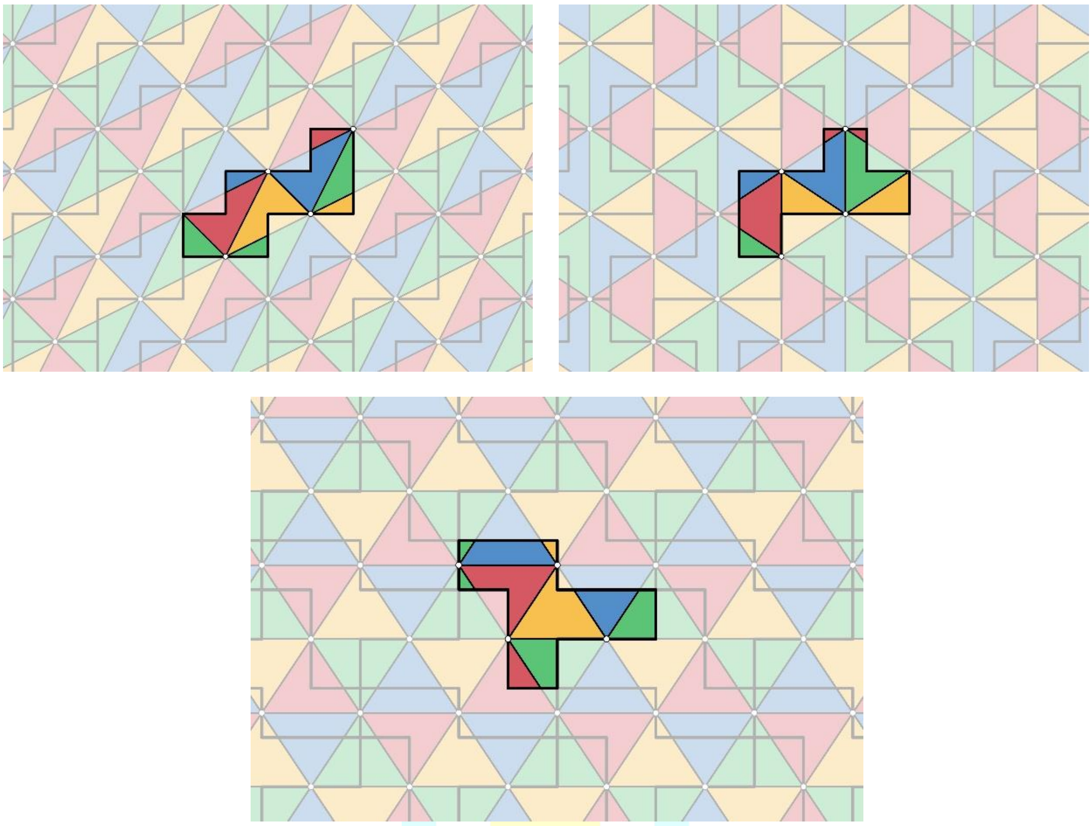


圖12、將正方體 11 種展開圖摺成四面體

是不是很美呢？鑲嵌與展開圖之間竟然有如此奇妙的連結。

讓思考發散

上段呈現的這些展開圖，它們既可以摺成正方體也可以摺成四面體，回應了本文的標題——「一面兩體」。

這不禁讓我們進一步思考一些問題：

1. 每種展開圖只有一種摺成四面體的方法嗎？
2. 有沒有同樣的四面體是用不同的展開圖摺成的呢？
3. 其他柏拉圖多面體——例如正八面體——是否也可以用這種方式摺成四面體呢？

這些問題，有些筆者心中已有了答案，有些還沒有，有興趣的話不訪利用茶餘飯後的時間研究研究！

結語

筆者在寫這篇文章時，腦中一直有著一個畫面：

在某個小學的課堂中，老師吆喝著同學依序收回昨天派發的數學作業本。待作業本收齊後，老師在講台上隨手拿了本翻翻，突然發現在某道題目旁邊，有個令人意外的答案。

題目是六個正方形所排成的十字架，詢問學生這是什麼立體圖形的展開圖。答案欄中填入的是潦草的鉛筆字跡，寫著『三角錐』。

『小明！』老師怒吼著，『你寫這什麼答案？』

作業本的主人聽到自己的名字後急忙上前，將視線移到老師手指尖端用力壓著的位置。

『這答案怎麼看都是正方體，用常識想都不可能是三角錐，你到底有沒有認真寫作業？』

『呼呼呼......用常識想當然不可能......』小明突然露出一抹冷笑，搶過老師手上的作業本，抽出講台上的剪刀，把圖形剪下後快速地摺疊！沒幾秒過後，停下動作的小明發出了狂妄的笑聲。

『老師！你太嫩了！』小明此時的腰已經後仰到快折斷的地步，左手遮住露出欣喜笑容的半張臉，右手則是高高平舉著，上面放著一個——三角錐。

教室瞬間安靜了，眾人眼中盯著小明手上那個小小的錐體，它是那麼地神聖，就像古埃及人崇拜著金字塔一樣。小明如同統治全埃及的法老，他的智慧與傲慢震懾著教室中每一個人，彷彿神明降臨了在他的身上。

『小明......跟我來辦公室一下......』

當天晚上，小明被父母罵了，理由是破壞數學作業本。

筆者非常喜歡這種顛覆常規的數學知識，簡單卻令人震驚。

身為一名教師，筆者認為好奇心一直是學習的過程中最重要的燃料。「為什麼」、「怎麼可能」、「你怎麼做到的」，如果可以讓學生在求學的過程中不斷地自發性尋求答案，那教師們是否就不需要鞭策學生唸書，而是可以當一個陪伴者，帶著學生在廣大的知識

花園中冒險呢？

這篇文章若您也感覺有趣，挑個展開圖試做看看，馬上就可以體驗到簡單的快樂。如果您是老師，也歡迎分享給學生，那些震驚到不可置信的表情，就是老師您獨享的樂趣喔！

張惟淳、袁靜娟、翁絛雄、張圓淇、許恬瑜、曾姮潔
臺南市立後甲國民中學

備註

1. 鑲嵌也可以是三維的，用立體圖形去填滿空間，亦或是更高的維度。本文所指的鑲嵌皆為平面鑲嵌。
2. 壁紙群共有17 種類型，但不代表所有的平面鑲嵌皆可分類為其中之一。另外，有些鑲嵌也可以同時視為其中的幾種類型。
3. 在某些特例情況下，旋轉中心會不等於 4 個。
4. 練習：

   其實任意四邊形，都是 P2 鑲嵌圖形喔！可以依照以下步驟試試：

   (1) 繪製一個任意四邊形（兩組對邊都不平行為佳）。

   (2) 標示出四邊形的各邊中點。

   (3) 將四邊形以這些點為旋轉中心旋轉180°，畫出鄰接的四邊形。

   (4) 不斷重複步驟(2)、(3)，就可以完成一幅鑲嵌圖形畫了！
5. 只有銳角三角形才可以形成等面四面體，直角三角形會成為壓扁的「平行兩面體」，而鈍角三角形則無法密合成立體圖形。另外，如果四個面都是正三角形，則圖形即為正四面體。
6. 每六個圍住六邊形的同色三角形就像是個六芒星，下圖以黃色和紅色的六芒星為示例。

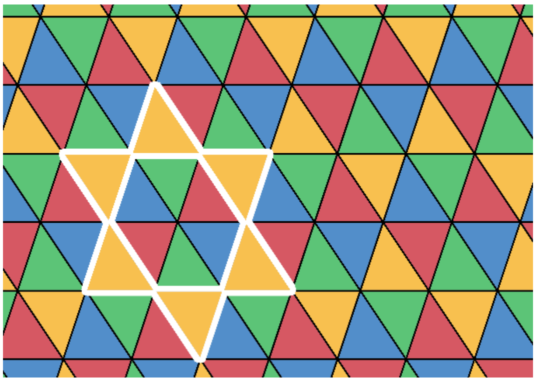


圖13、六芒星染色法

7. 如同備註 5，有時候會形成壓扁的「平行兩面體」。

參考資料

[1] *秋山仁。離散幾何学フロンティア：タイル・メーカー定理と分解回転合同（離散幾何學開拓：鑲嵌生成定理與分解回轉全等）。近代科学社，2020。*

[2] Jin Akiyama. *Tile-Makers and Semi-Tile-Makers.*

[3] The American Mathematical Monthly, 2007.

[4] *Jin Akiyama and Kiyoro Matsunaga. Treks into Intuitive Geometry. Springer Japen, 2015.*

[5] *Wei-Chun Chang and Chih-Hung Yen. "Quadruple Tetrahedron Surface Tilings". Bridges 2021 Conference Proceedings, 2021, pp. 335–338.*