

因「圓」「扇」果 一題多解的數學創造力

——以一片葉子的複合圖形面積為例

文／張雅文

前言

OECD 在 2019 年宣布「創造力與創新年」，強調創造力對教育、文化和經濟發展的重要性；並且在數學 PISA2022 評量前，提出 21 世紀公民所需要發展的八大技能，包含批判性思考、創造力、研究和探究、自主行動和堅持、資訊運用、系統思考、溝通、反思。現今已進入 AI (Artificial Intelligence) 世代，人工智慧號稱能模擬人類智能的技術，無論學習、推理、感知和語言理解等都具有強大能力。也就是說，當代教育正面臨技術與信息革命，學生可隨時獲取大量資訊，因此教育應強調信息篩選、分析和創造性應用，因為人工智慧無法取代創造性問題解決和創新思維 (Kontrová, Biba & Šusteková, 2021)。提升數學創造力能激發學生學習靈感、鼓勵學生並提供強大的動力 (Hamid & Kamarudin, 2021)。目前，許多數學教師雖都支持創造力的重要，但在課堂上仍缺乏實踐 (Aljughaiman & Mowrer-Reynolds, 2005)。尤其，數學課堂若只是在背公式的僵化教學實踐 (Hamid & Kamarudin, 2021)，如何增加數學創造力？數學課堂上又如何布題來培養學生的數學創造力？

數學創造力

創造力被認為是數學教育的核心組成部分 (Mann, 2006)，因此數學創造力要從小培養，而且數學創造力不僅能助於提升學生的數學學習成就，還能培養學生在其他領域的創新能力 (Boldt, Canavan, Cody & Gubbins, 2023)。

數學創造力指在解決數學問題時提出新穎且適當的解決方案，或建構新的數學問題。數學創造力除了以定義的說法來解釋外，其他學者對數學的創造力也有多元見解。如 Bicer (2021) 認為能夠生成新的數學想法、過程或作品，這些對學生而言是新的，但不一定對世界其他地方是新的，或者讓學生能夠個人或協作完成定義不明確的目標，並探索多種解決方法也可謂數學創造力。也就是說，學生發現一個已知的結果或創新策略也可被視為數學創造力 (Sriraman, 2009)。

許多學者將數學創造力定義為靈活性 (思維多樣性)、流暢性 (連續性的想法) 和獨創性 (新穎性) (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013)。之後也有學者補充，流暢性是短時間內給出正確答案的能力，靈活性是產生不同解決方法的能力，獨創性是使用新穎且非凡

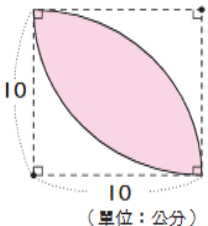
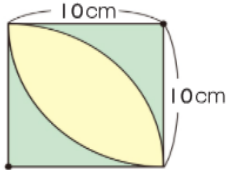
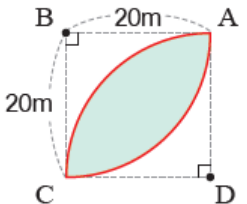
解決問題的能力 (Wahyudi, Waluya, Rochmad & Suyitno, 2018)。後來, Suherman 和 Vidákovich (2022) 再增加了詳細性 (深入的解釋)。

提高學生數學創造力的一種方法是激勵他們將數學問題視為挑戰並用多元的方式思考, 這種方法還能增強學生對數學學習興趣 (Hamid & Kamarudin, 2021)。數學課堂中的創造力主要與解決問題和提出相關問題 (Leikin & Kloss, 2011)。數學教育者認為, 通過鼓勵學生以不同的方式思考, 利用創意學習方法可以增強數學中的創造力 (Hamid & Kamarudin, 2021)。例如, 課堂中的創造性活動部分, 教師可以使用開放性問題和多元解法問題來促進學生的創造性 (Cansız, 2016), 支持學生從多元角度解決數學問題的多重解題法 (Nwoke, 2021), 所以教師應將更多的開放性問題融入課堂, 鼓勵學生探索多元解法問題 (Novita & Putra, 2016), 並且透過合作學習和實踐活動, 學生能更好地參與學習並發展解決問題的能力 (Waswa & Moore, 2020)。

筆者認為若要培養學生的數學創造力, 數學課堂可以先從一題多解的模式入手, 給予學生開放性的問題, 以小組合作的方式, 鼓勵學生從多元的角度思考解題方法, 拓展學生學習思維。待培養出學生樂於挑戰數學問題時, 再慢慢加入數學創造力的靈活性、流暢性、獨創性以及能以數學語言具體分析說明數學知識與自身解題思考脈絡連結的詳細性。

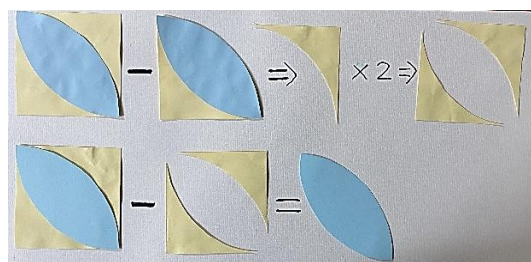
一片葉子的複合圖形面積教材分析

扇形複合圖形的面積計算, 有一道經典的數學題型, 自九年一貫課程延續至十二年國教, 一直深受廣泛討論之「一片葉子」, 至今國小六年級課本的三大版本皆有此題型, 僅正方形邊長不同。此題型為六年級扇形面積的學習重點, 學習表現為 s-III-2 認識圓周率的意義, 理解圓面積、圓周長、扇形面積與弧長之計算方式。學習內容為 S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積: 用分割說明圓面積公式, 求扇形弧長與面積 (教育部, 2003)。十二年國教國小數學六年級課本三大版本「一片葉子」題目說明及比較如下:

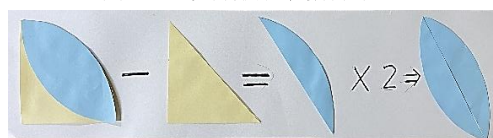
版本	南一	康軒	翰林
學年度	113 學年度上學期	113 學年度上學期	113 學年度下學期
單元名稱	第六單元 扇形弧長與面積	第七單元 圓面積與扇形面積	第二單元 圓面積與扇形面積
課本題目	第 11 冊數學課本 p91 題目 下圖中，塗色部分的面積大約是幾平方公分？	第 11 冊數學課本 p103 題目 用 2 個 $\frac{1}{4}$ 圓的扇形合起來拼成正方形，重疊的黃色部分面積大約是多少平方公分？說說看，你是怎麼算的？	第 12 冊數學課本 p29 題目 以正方形的點 B 和點 D 為圓心，分別畫出 $\frac{1}{4}$ 圓的扇形，所圍成的面積是幾平方公尺？
			

南一、康軒、翰林版課本相同解法一

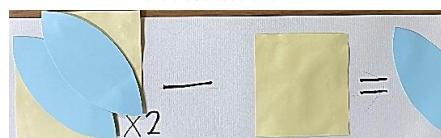
課本
解題
方法



南一、康軒版相同解法二



翰林版解法二



三大版本在此題的解法共 3 種，第一種三大版本皆有：先算正方形面積減扇形面積後剩下類迴力鏢形面積，再用正方形面積減掉 2 個類迴力鏢形面積得到一片葉子面積；第二種為南一、康軒版共有：先算扇形面積減三角形面積得到半片葉子的面積，再乘以 2 得到一片葉子面積；第三種為翰林版解法：將扇形面積乘以 2 再減去正方形面積得到一片葉子面積。

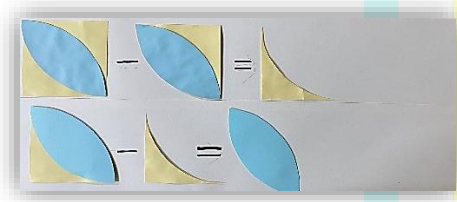
一題多解數學創造力成果

為使學生能思考出一題多解的數學創造力，教師秀出題目後（題目同康軒版，僅重疊的黃色面積更改為藍色面積）。教學方法為請小組討論與合作，可以找出幾種不同的算法？教學時，建議學生小組合作策略為先，討論有哪些不同的解法，可藉由繪圖表示想法，接著以分工的方式寫出不同的解法。最後確認各組可以找出幾種不同的算法？學生不同於三大版本課本的解法分為方「正」不阿、「扇」解人意、開枝散「葉」形，分述如下：

一、方「正」不阿

先算正方形面積，減去扇形面積得到類迴力鏢形面積。上述部份和課本解法相同，但接下來後算的部份則有不同的創造力（偏向流暢性與靈活性）。分述如下：

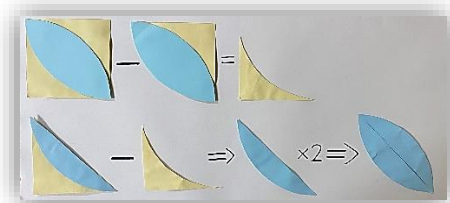
後算以扇形面積直接減類迴力鏢形面積得到一片葉子面積，如下：



$$\begin{aligned} 10 \times 10 &= 100 \\ 10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{4} &= 3.14 \times \frac{1}{4} = 78.5 \\ 100 - 78.5 &= 21.5 \\ 78.5 - 21.5 &= 57 \end{aligned}$$

學生認為既已算出扇形面積、類迴力鏢形面積，扇形面積只要減掉 1 個類迴力鏢形面積就可以得到一片葉子面積，不用像課本回到正方形面積去減掉 2 個類迴力鏢形面積，計算上也較簡捷。

後算以三角形面積減類迴力鏢形面積得到半片葉子的面積，再乘以 2 得到一片葉子面積，如下：



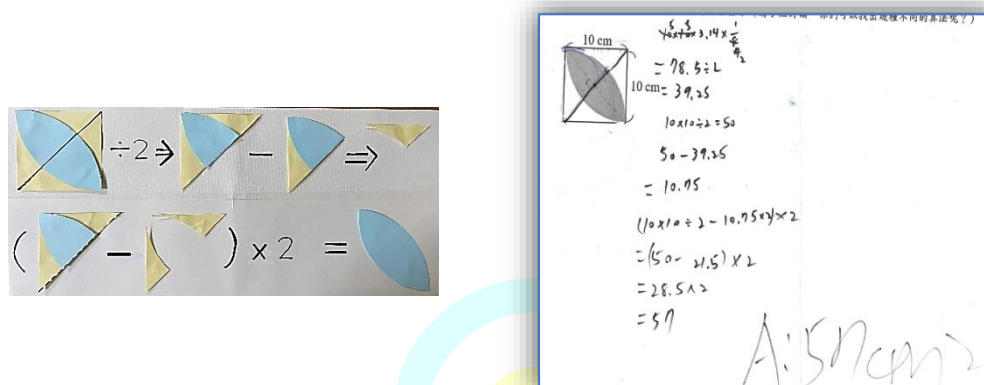
請小組討論，你們可以找出幾種不同的算法呢？

$$\begin{aligned} 10 \times 10 - 10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{4} &= 21.5 \\ (10 \times 10 \div 2 - 21.5) \times 2 &= 57 \quad A: 57 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

學生此時看到正方形對角線一半的三角形面積，認為用三角形面積只要減掉 1 個類迴力鏢形面積就可以得到細長形的半片葉子面積，最後再將半片葉子面積乘以 2 就可以得到一片葉子面積。

二、「扇」解人意

先算扇形面積，但不同於三大版本課本的 2 種解法，而是算出原圓形面積的八分之一扇形面積，接著以正方形一半的三角形面積減八分之一扇形面積，得到類迴力鏢形面積的一半，再以原正方形一半的三角形面積減去 2 個各半的迴力鏢形面積，算出後乘以 2 得到一片葉子面積（較具獨創性），如下：

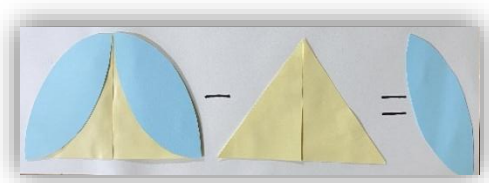


學生指出因為課堂上老師希望小組合作能找出不同的解法，所以在思考時就往不同面向去做對角線切割。因為課本都是以左上往右下的對角線切出外形比較細長的葉子，所以才會想從另外一個角度思考，由右上往左下切割出比較短胖形的葉子。計算方法為先算出正方形由右上往左下切割的三角形面積，接著算出八分之一的扇形面積，以三角形面積減八分之一的扇形面積得到半個類迴力鏢形面積。再以原由右上往左下切割的三角形面積減去 2 個只有一半的類迴力鏢形面積，接著將上述算式括號乘以 2，得到完整的一片葉子面積。

三、開枝散「葉」

國小數學三大版本課本皆未出現此種作法，但學生為了能想出不同解法，將原本題目的圖形做擴展思考（較具獨創性）。

1. 複製一個原圖形變成半圓，以半圓面積減 2 個三角形面積，得到一片葉子面積。如下：



$$10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{2} = 157$$

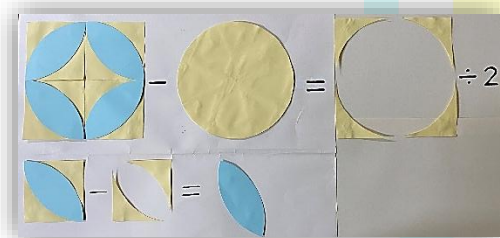
$$10 \times 10 \div 2 = 50 \times 2 = 100$$

$$157 - 100 = 57$$

$$A: 57 \text{ cm}^2$$

學生思考的關鍵點在於原正方形面積要如何計算出一片葉子面積時，發現扇形面積減去三角形面積即可得到半片葉子的面積，那麼除了課本把扇形重疊減去正方形面積的方法外，亦可把扇形拼組成半圓形，算出半圓形面積減去 2 個三角形面積就可以得到一片葉子的面積。

直接將圖形變成完整的圓形和大正方形，以大正方形面積減去完整圓面積，得到 4 個類迴力鏢形面積。因為題目原圖只要減去 2 個類迴力鏢形面積，所以將所得到的 4 個類迴力鏢形面積除以 2，得到 2 個類迴力鏢形面積。再以原圖的小正方形面積減去 2 個類迴力鏢形面積，得到一片葉子面積。如下：



$$10 \times 10 \times 3.14 = 314$$

$$10 \times 10 \times 4 = 400$$

$$400 - 314 = 86$$

$$86 \div 2 = 43$$

$$10 \times 10 - 43 = 57$$

$$A: 57 \text{ cm}^2$$

學生指出因為學習扇形面積前學過圓形面積，認為可以從圓面積的角度來思考做計算。所以將原圖複製後由 4 個小正方形拼組成一個大正方形，大正方形內有一個完整的圓形，就可以由大正方形面積減去完整圓面積的方法，再做後續解題計算。

結論與建議

教師都知道數學創造力的重要，但常礙於教學時間不足而作罷。經由此次教學設計與嘗試，發現數學創造力不是一蹴可幾，也不要一開始就想要以完整的定義去設計符合流暢性、靈活性、獨創性和詳細性的全面性數學創造力。可以嘗試從一般數學課堂的數學創造力入手，建議可以先試著從教學設計中搜尋開放性的一題多解題型，讓學生在安心感的小組合作討論氛圍中，鼓勵學生以多元的角度思考不同的解題方法，調整過去只

發現一種解法就關閉思考大門的僵化式學習習慣。另外，教師也可以通過調整題目的問法，嘗試使題型更加開放，從而提供學生多種解題路徑的機會。當各組有多元解法後，通過全班的分享與共論，學生將有機會更好地理解數學的抽象性，並在多元的解決問題中培養並發展其數學創造力。

張雅文

臺北市民族國小教師

參考資料

- [1] 教育部 (2003 年 11 月)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。
[https://www.k12ea.gov.tw/files/980424_數學課程綱要修訂\(單冊\).pdf](https://www.k12ea.gov.tw/files/980424_數學課程綱要修訂(單冊).pdf)
- [2] Aljughaiman, A., & Mowrer-Reynolds, E. (2005). Teachers' conceptions of creativity and creative students. *Journal of Creative Behavior*, 39(1), 17-34.
<http://dx.doi.org/10.1002/j.2162-6057.2005.tb01247.x>
- [3] Bicer, A. (2021). A systematic literature review: Discipline-specific and general instructional practices fostering the mathematical creativity of students. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(2), 252-281. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1254>
- [4] Boldt, G. T., Canavan, E. J., Cody, R. A., & Gubbins, E. J. (2023). Developing mathematical creativity in gifted and talented education. *Teaching for High Potential*, 16-17. Renzulli Center for Creativity, Giftedness, and Talent Development, University of Connecticut.
- [5] Cansız Aktaş, M. (2016). Turkish high school teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, 4(2), 42-50.
<https://doi.org/10.11114/jets.v4i2.1123>
- [6] Hamid, N. H. A., & Kamarudin, N. (2021). Assessing students' mathematics achievement and mathematical creativity using mathematical creative approach: A quasi-experimental research. *Asian Journal of University Education*, 17(2), 101-112. <https://doi.org/10.24191/ajue.v17i2.13399>
- [7] Kontrová, L., Biba, V., & Šusteková, D. (2021). Relationship between mathematical education and the development of creative competencies of students. *European*

- Journal of Contemporary Education*, 10(1), 89–102.
<https://doi.org/10.13187/eiced.2021.1.89>
- [8] Leikin, R., & Kloss, Y. (2011). Mathematical creativity of 8th and 10th grade students. In CERME7 Proceedings (pp. 1084–1093). University of Rzeszow, Poland: Erme.
- [9] Leikin, R., & Pitta-Pantazi, P. (2013). Creativity and mathematics education: The state of art. *ZDM Mathematics Education*, 45(2), 159–165.
- [10] Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236–260.
- [11] Novita, R., & Putra, M. (2016). Using task like PISA' s problem to support student' s creativity in mathematics. *Journal on Mathematics Education*, 7(1), 33–44. <https://doi.org/10.22342/jme.7.1.2816.33-44>
- [12] Nwoke, B. L. (2021). Enhancing primary school pupils' mathematics creative ability through activity-based learning approach. *Malikussaleh Journal of Mathematics Learning (MJML)*, 4(2), 70–76. <https://doi.org/10.29103/mjml.v4i2.5707>
- [13] Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *The International Journal on Mathematics Education [ZDM]*, 41(1), 13–27.
- [14] Suherman, S., & Vidákovich, T. (2022). Assessment of mathematical creative thinking: A systematic review. *Thinking Skills and Creativity*, 44, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2022.101019>
- [15] Wahyudi, Waluya, S., Rochmad, & Suyitno, H. (2018). Assimilation and accommodation processes in improving mathematical creative thinking with scaffolding according to learning style. *ICRIEMS 5, Journal of Physics, Conference Series*, 1097, 1–13. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012156>
- [16] Waswa, A. N., & Moore, K. C. (2020). Investigating elementary pre-service teachers' conceptions of mathematical creativity. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1535–1543). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. <https://doi.org/10.51272/pmna.42.2020>