

數學與藝術的交織：數學跨領域課程設計的創意思考

文／謝佳叡

前言

筆者自 103 年起擔任跨領域美感教育卓越領航計畫的輔導員與評審員，主要是協助中小學發展數學與藝術跨領域美感課程模組設計。數學與藝術跨域課程可以歸納出兩種常用的融入手法，一是在藝術作品中挖掘數學元素，二是將藝術視為數學的載體。前者如，探究建築中的幾何比例、音樂中的數學式或繪畫中的射影幾何結構等，有些設計會進一步使用數學概念進行藝術創作；後者則是以藝術表述數學，如用裝置藝術表達數學概念、用電影、音樂、文學表達數學定理等。這兩種方式在現今的表藝課或數學課中常讓人耳目一新。

隨著跨領域課程、STEAM、美感教育，以及無可計數的數學、藝術、教育工作者的創作與推動，產生極為豐富、多彩、繽紛、創意的數學與藝術作品，在科技與 AI 的介入後，更達到一個前所為有的視覺體驗。本文從系統性角度，逐一探究數學在藝術領域八大分類中的關聯性與功能稍做介紹，供有意進行融合教學的數學老師或表藝老師參考。

八大藝術及其數學內涵

根據藝術的形式分類，藝術通常包括以下八個主要領域，分別是建築、雕塑、繪畫、音樂、文學、戲劇、電影與舞蹈。這些藝術形式或多或少都與數學有關：

一、建築藝術：建築物的設計和建造，屬於三維的藝術作品

| | |
|-------|--|
| 數學關聯性 | 幾何學：用於建築設計中的比例、形狀、對稱和空間結構。 計算與工程：需要數學計算以確保結構的穩定性和功能性，例如應力分析和材料用量估算。 黃金比例：常用於建築設計，增加視覺美感。 |
| 數學功能 | 設計工具：建築使用數學模型和電腦輔助設計（CAD）軟件進行設計。 分析工具：用於測量、結構分析和成本計算。 |

數學在設計、結構、安全與美學中發揮了關鍵作用。在歷史上，幾何學為建築提供了精確的規劃工具，例如古埃及金字塔，運用了等腰三角形的幾何比例來確保其穩定性與對稱美感。同樣，古希臘帕特農神廟採用黃金比例創造了和諧與優雅的建築形式，成為建築美學的經典範例。在東方，受到《易經》的影響，建築也需要配合數的神秘意義，

例如，自漢代以降，中國古建築間數、層數也都是奇數，如北京天壇為祭天之所，其中的圓丘、尺寸、石料大小、件數都是奇數。

除了抽象的意義與美感，在防禦建築中，數學更具實用價值。中世紀的城堡設計考慮了防禦角度，例如箭塔設計以最佳角度覆蓋攻擊範圍（如圖 1），且牆壁厚度與斜坡通過數學計算提高防禦力。現代建築中，數學與技術創新結合，也開啟了建築物的高度、結構、外觀的無限可能。

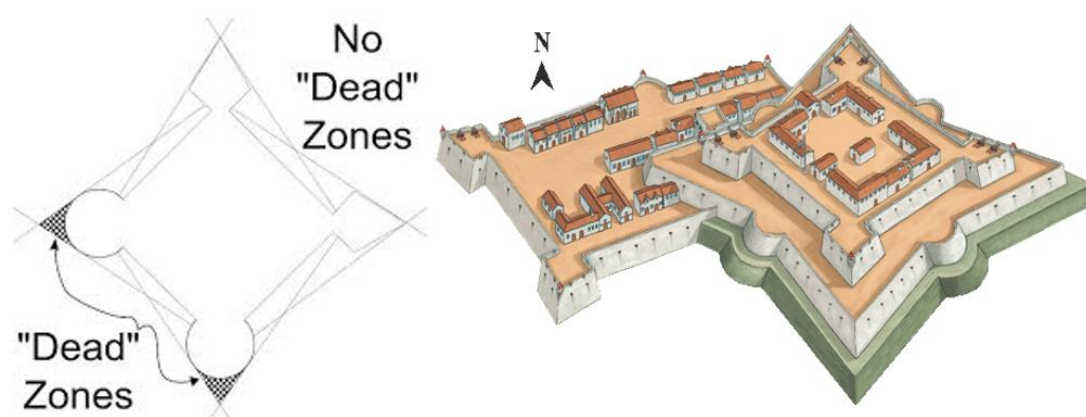


圖 1. 城堡設計考慮防禦無死角

(左) 棱堡無死角示意圖

(圖片來源: <https://www.pinterest.com/pin/781444972820583365/>)

(右) 熱蘭遮城 (安平古堡示意圖)

(圖片來源: <https://tainan2010.pixnet.net/blog/post/2762123>)

二、雕塑藝術：利用各種材料以形狀、質感、姿態表現的空間藝術作品

| | |
|-------|--|
| 數學關聯性 | 幾何造型：雕塑需要運用三維空間的理解來創作曲面與體積。 對稱與比例：用於創作視覺上平衡的作品。 |
| 數學功能 | 三維建模：現代雕塑藉助數學模型進行精確設計。 材料計算：計算所需材料的量及成本。 |

雕塑藝術不僅是對美的表現，在數學應用下也啟發人們用創新視角理解空間與形態的無限可能性。雕塑包含了「雕刻」與「塑形」兩個概念，雕琢之物要思考將材料做最大效益切割，如鑽石切割；塑形則要思考材料本身能否支撐本體結構，數學不僅能幫助雕塑藝術家創造精準的形態，也推動了現代雕塑的創新。

在歷史上，比例與對稱已經成為雕塑的 DNA。例如，米開朗基羅的《大衛》通過黃金比例塑造了理想的人體美學，展現了數學在藝術創作中的潛力。現代雕塑中，數學進一步融入技術創新，許多裝置藝術往往藉助數學模型設計出大規模、複雜的結構，例如

英國藝術家安東尼·葛姆雷 (Antony Gormley) 的《Field》(如圖 2)，通過排列和數量的幾何美學營造出震撼的視覺效果。此外藝術家可以使用數學算法創造具有碎形幾何特徵的雕塑，而 3D 列印技術更直接將數學函數與方程式帶入雕塑製作。

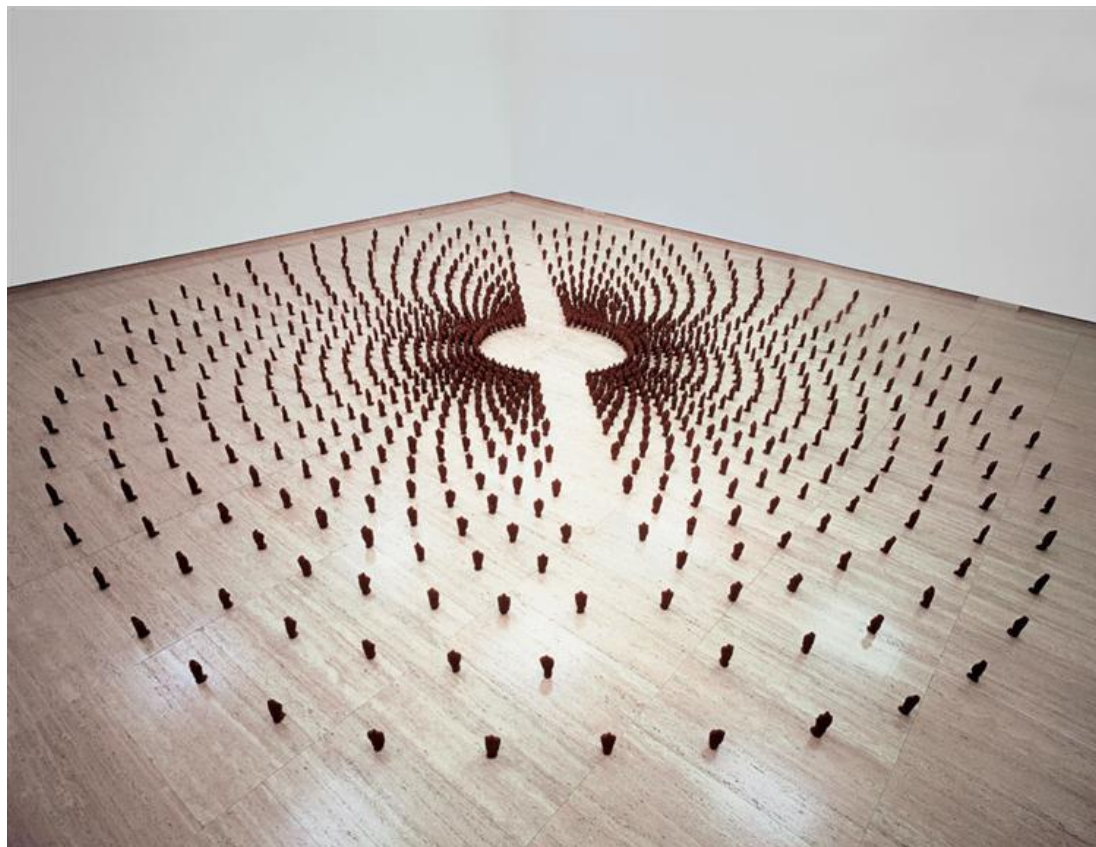


圖 2、安東尼·葛姆雷 (Antony Gormley) 的《Field》

圖片來源：<https://www.wikiart.org/en/antony-gormley/field-1989>

三、繪畫藝術：通過顏料在平面上創作作品，表現色彩、線條和構圖

| | |
|-------|--|
| 數學關聯性 | 投影與透視：用於創造畫面的深度和空間感。 對稱與碎形：自然畫作和現代藝術中常見碎形幾何。 |
| 數學功能 | 視覺引導：用比例法則如三分構圖法設計畫面。 色彩模型：RGB 與 CMYK 的數學應用，幫助調配顏色。 |

繪畫藝術中的數學應用不僅用於對結構和美感的探索，也啟發了人們理解視覺構圖與自然規律。由於繪畫是在二維平面上展現多維度的意象，因此如寫實的 3D 風景人物想要「看似自然」的呈現在 2D 平面畫布上，必須藉助射影幾何的變換原理。如在文藝復興時期，數學與繪畫的結合達到高峰，線性透視法的發展是典型案例。布魯內列斯基 (Filippo Brunelleschi, 1377-1446) 和達文西 (Leonardo da Vinci, 1452-1519) 等藝術家通過透視原理，創造了畫面深度與空間感。

20 世紀的荷蘭藝術家艾雪 (M.C. Escher, 1898-1972) 以平移和旋轉為基礎，創作了大量鑲嵌版畫，作品中大量展現了對稱與空間變換的奇妙運用。他也利用了數學的遞迴或迴圈的概念，在有限的畫布中表現出無限的概念。而三幅不可能的建築板畫則運用的內克方塊 (Necker cube) 與潘洛斯三角 (Penrose triangle)，這些創作深受數學群論與幾何變換的啟發，將藝術與數學緊密結合。

現代數學 (如碎形幾何) 也進一步推動了繪畫藝術的創新。藝術家利用碎形模式創作出如雪花般的無限細節圖案，例如，伯努瓦·曼德布羅 (Benoît B. Mandelbrot) 的曼德布羅集合 (Mandelbrot Set) 是一種在複數平面上組成碎形點集合啟發的藝術作品 (圖 3)。數位 (字) 藝術的興起也讓畫家通過電腦模擬，運用算法生成複雜的幾何圖案，將數學的抽象美轉化為視覺藝術。一些特殊的繪畫作家會用到對稱 (如曼陀羅 Mandala 藝術，圖 4)、等距線 (沃羅諾伊圖，Voronoi Diagram，圖 5)、黃金比例、黃金矩形來表現畫作。

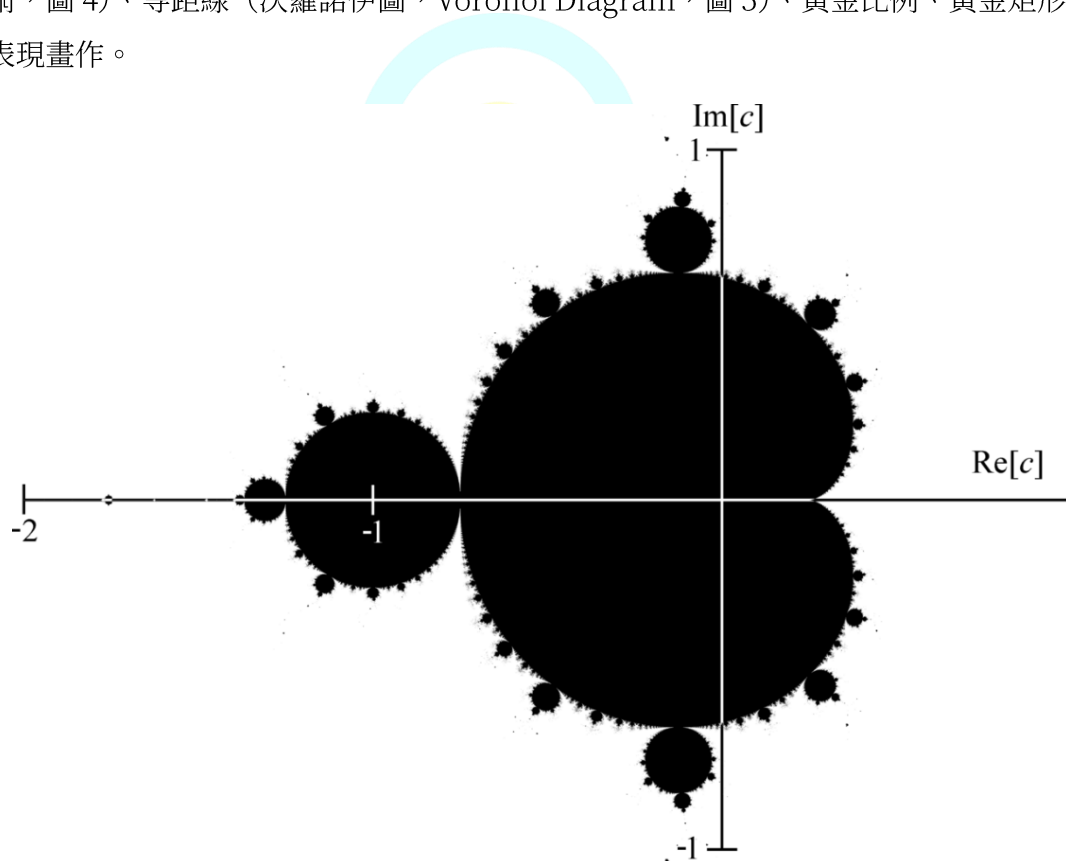


圖 3、Mandelbrot Set

圖片來源 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/曼德博集合>

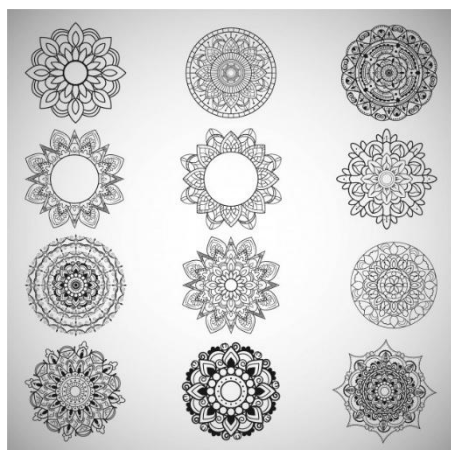


圖 4、Mandala Art

<https://harmony0712.wixsite.com/lmcem-ok1/post/>

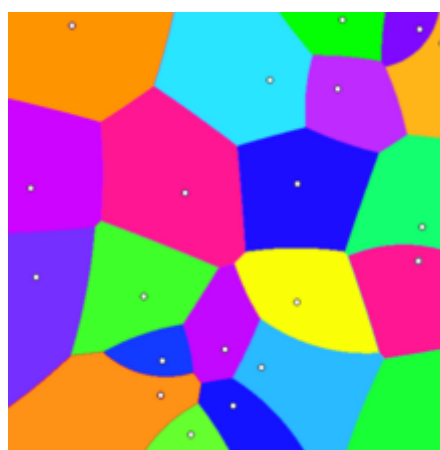


圖 5、Voronoi Diagram

https://en.wikipedia.org/wiki/Weighted_Voronoi_diagram

四、音樂藝術：使用聲音和旋律進行創作的藝術作品

| | |
|-------|---|
| 數學關聯性 | 音階與頻率：音高和音階基於數學分類。 節拍與時間：節拍需要數學中的分數和時間計算。 傳統與現代作曲：例如傅里葉變換在音樂合成中的應用。 |
| 數學功能 | 作曲：用數學模型創作複雜的音樂模式。 音響工程：聲波分析與調整。 |

音樂與數學的結合展示了比例、對稱與結構的美感，也啟發作曲家創作。音樂藝術自古以來與數學有著密不可分的聯繫，音樂中的音學和律學都是以數學為基礎，而泛音理論更是微分方程的重要實例。在古希臘，數學家畢達哥拉斯通過研究弦的長度與音高的比例，發現了音程的數學規律，創立了「畢氏音階」。他發現音高與弦長之間的簡單比例可以產生和諧的音程，這一理論成為音樂數學的基石。「純律」的概念則基於自然泛音系列創造了更和諧的音階；而「十二平均律」的誕生標誌著音樂與數學的深度融合，通過將八度音程分為 12 個等比間隔，解決了不同調性之間的轉調問題，使得鋼琴等鍵盤樂器得以實現豐富的和聲與旋律變化。

音樂中的節奏與數學的關聯同樣密切。音符時值（也稱為**音符值**或**音值**）是以分數概念表示（如四分音符、八分音符），構成了音樂的節奏結構。如全音符等於兩個「二分音符」、四個「四分音符」，附點音符是分數的乘法。而譜寫樂曲要符合每音節的拍子數，在一個固定的拍子裡使用不同長度的音符來湊成一個特定的節拍，此過程與分數加法雷同。此外，數列也被用於作曲中創造漸變的和諧感，例如，德布西的《牧神午後》便在旋律和節奏中隱含數列規律。巴哈（Johann S. Bach）的音樂在對位法、數列、對稱結構等方面展現出極高的數學精妙度，他的作品《音樂的奉獻》（Musikalisches Opfer，

BWV 1079) 就是一部極具數學意涵的音樂作品，當中採用了逆轉變換 (Inversion)、鏡像對稱 (Mirror Symmetry)、螃蟹卡農 (Crab Canon) 就是體現了數學與藝術的完美結合 (Hofstadter, 1999)。

現代音樂中，數學模型進一步推動創新。例如電子音樂的合成中，傅里葉變換被用於分析與合成聲波，創造全新的音色。計算機算法作曲讓數學成為音樂創作的直接工具，開啟了無限的創意可能。

五、文學藝術：以文字為媒介表現人類思想、情感、智慧的一種藝術

| | |
|-------|---|
| 數學關聯性 | 結構與節奏：詩歌和散文中運用數字結構 (如音節數、句子長度)。 自然語言處理：數學用於分析和創作，例如詞頻分析。 |
| 數學功能 | 數學主題：用數學哲學和概念 (如無限、尤拉公式等) 建構文學內涵。 數據分析：用數學研究文學風格和模式。 |

文學藝術以情感和語言為主，但數學在分析與創作中發揮著重要作用也為文學提供了結構與風格研究的新方法。在古代詩歌中，數學已被用於創作規律化的形式，例如中國的格律詩要求精確的字數和平仄對仗，這些結構中的數學邏輯使詩歌達到形式與美感的統一，這在西洋文學中也同樣表現 (Aharoni, 2019)。現代文學分析中，數學也被廣泛應用於研究文本模式，詞頻分析即是一個典型例子，通過統計文本中詞彙的出現次數，研究作者的語言習慣與風格。例如，數學家喬治·齊普夫 (George K. Zipf) 提出的齊普夫定律 (Zipf's law) 描述了詞頻分佈，揭示了語言的內在結構。這一理論被用於分析文學作品的詞彙多樣性和作者風格，甚至在文學偽作鑑定中發揮了作用。

此外，數學還參與文學創作的過程。例如，斐波那契數列被用於設計詩歌或散文的段落結構，創造出漸變或對稱的美感。馬丁尼茲 (Guillermo Martínez) 的作品《牛津謀殺案 (The Oxford Murders)》結合數學規則與敘事結構，展現了文學與數學的融合。現代數位文學中，算法創作更是將數學推向前台，通過電腦程序生成隨機或模式化的文本內容。文學與數學的結合為教育提供了跨學科的視角，通過數學研究文學，不僅拓展了分析方法，也讓文學創作融入了數理邏輯的美感。

六、戲劇藝術：在舞台上以表演的形式呈現故事

| | |
|-------|--|
| 數學關聯性 | 舞台設計：用幾何和空間數學設計場景佈局。 燈光與聲學：數學用於計算光線反射和聲音傳播。 |
| 數學功能 | 劇場技術：模擬和優化視覺和聽覺效果。 時間控制：劇場時間管理的數學規劃。 |

數學在舞台設計、燈光與聲音效果中發揮了重要作用，為戲劇創作和表演提供了科學支持，並使觀眾的視覺與聽覺體驗更加深刻。在古希臘，劇場建築設計運用了數學幾何學，特別是在音響效果上。如埃皮達魯斯圓形露天劇場（Theatre of Epidaurus，圖 6）依靠數學計算的聲音反射與擴散設計，即使坐在最後一排的觀眾也能清晰聽到演員的聲音。現代戲劇中，數學在燈光設計和聲學計算中扮演著關鍵角色。例如，舞台燈光的設置需要運用幾何學和三角函數計算光線的角度與範圍，以精確控制光線的聚焦和散射效果。聲音工程則使用波動方程模擬聲音的反射和吸收，確保劇場內的聲音均勻分佈，避免回音或死角，讓戲劇表現更加逼真和富有感染力。

戲劇藝術與數學的結合，也能將數學融入情感與故事之中。斯托帕德（Tom Stoppard）的《Arcadia》便是一部結合數學混沌理論與人性探索的經典戲劇。綠光劇團改編 David Auburn 的劇本《求證（Proof）》則敘述在求證一個數學界的質數證法過程，與人性、親情、愛情的映照，啟發觀眾思考數學與人生的交織。



圖 6、埃皮達魯斯古劇場全景。Andreas Trepte 攝。圖片來源：wikipedia

七、電影藝術：以動態影像和聲音結合的形式講述故事或傳達思想

| | |
|-------|--|
| 數學關聯性 | 特效與動畫：數學模型（如渲染、流體模擬）。 鏡頭設計：計算鏡頭角度和景深。 |
| 數學功能 | 數位影像處理：算法用於畫面優化。 編輯與分鏡：時間序列的數學安排。 |

電影藝術的發展離不開數學的支持，數學在畫面構圖、鏡頭設計、動畫製作和特效創新中發揮了關鍵作用，使電影成為數學與藝術的完美結合。從早期的攝影到現代的數位影像，數學幫助電影工作者創造出令人驚嘆的視覺效果，為觀眾帶來沉浸式的體驗。在拍攝階段，數學用於計算鏡頭角度、焦距與景深。例如，通過光學公式計算景深，可以確定哪個範圍內的畫面是清晰的，並通過調整鏡頭參數來實現特定的視覺效果。在構圖中，數學中的三分法、黃金比例被廣泛用於設計畫面，提升畫面的和諧美感與吸引力。

動畫與特效是電影中數學應用最突出的領域。光影效果的模擬依賴於數學中的光線

追蹤算法 (Ray Tracing)，該技術能計算光線在物體表面上的反射、折射與陰影效果，為動畫場景增添真實感。皮克斯動畫工作室的《玩具總動員》等作品正是使用這些數學模型實現了自然的光影和動態效果。此外，流體模擬算法也用於創造如水、火焰等逼真的自然元素，為《阿凡達》等電影的視覺奇觀提供了技術支持。

七、舞蹈藝術：通過身體動作來表現情感、故事或節奏

| | |
|-------|---|
| 數學關聯性 | 動作與對稱：舞蹈編排中運用對稱與空間數學。 時間與節奏：精確的數學時間計算融入舞步設計。 |
| 數學功能 | 動態分析：用數學分析身體的運動。 影像記錄：通過數學模擬舞蹈運動軌跡。 |

數學在舞蹈藝術的編舞、時間計算和空間設計中起到了重要作用，展示了美感與精確性的融合。在舞蹈編排中，數學用於設計對稱的舞步和隊形。許多群舞作品，尤其是芭蕾舞或現代舞中的大場景表演，利用幾何對稱和空間分割創造視覺衝擊，芭蕾舞的群舞作品中經常出現以圓形、對角線或放射狀排列的隊形，這些設計依賴於數學的幾何規劃。

時間的精確計算是舞蹈中不可或缺的一部分。每個舞步需要與音樂節拍完美對齊，而節拍的長度和速度可以用數學中的分數與小數精確表示。複雜的舞蹈組合往往使用數列或循環模式，使動作重複且流暢。現代舞蹈中，數位技術的引入進一步強化了數學的應用。例如，運用軌跡模擬技術記錄舞者的動作，創造出結合數位化與人體運動的創新表演。甚至在大型表演中，無人機與舞者的互動設計，需要精密的數學軌跡計算來確保同步和安全。這些高精度的編排舞或科技舞蹈表演，若沒有數學的參與，將無法達到現在的效果。

數學與藝術跨領域統整課程設計概述

以下是針對八大藝術與數學相關性提出一些中小學生理解程度下的課程設計構思，供有興趣者參考。

一、建築藝術：國小高年級

- 目標：學習平面幾何和比例的應用
- 課程主題：設計夢想中的建築
- 數學概念：幾何形狀（長方形、三角形）、比例、對稱
- 課程內容：
 1. 介紹世界著名建築（如比薩斜塔或台北 101）及其幾何特徵。

2. 使用方格紙設計一棟自己的建築，確保左右對稱。
3. 計算建築表面積與需要的建材量（簡化計算）。

二、雕塑藝術：國小高年級到高中

- 目標：理解三維形狀的結構與計算方法。
- 課程主題：創造數學雕塑
- 數學概念：三維形狀（立方體、球體）、體積與表面積
- 課程內容：
 - 用黏土或紙板製作雕塑，結合球體、圓柱體等幾何體。
 - 計算雕塑的體積，並探索不同材料所需的量。
 - 展示運用數學創作之的雕塑，討論數學與藝術的聯繫。

三、繪畫藝術：高中

- 目標：學習基本幾何圖案及比例應用。
- 課程主題：創造數學碎形藝術
- 數學概念：碎形幾何、遞迴、比例
- 課程內容：
 - 教學生利用軟體繪製簡單的碎形圖案，如 Sierpiński 三角形。
 - 使用電腦或平板探索比例如何影響圖案的縮放。
 - 討論碎形在自然界的應用（如樹木或雪花）。

四、音樂藝術：國小中年級到國中

- 目標：了解音樂節奏與數學分數的關聯。
- 課程主題：音樂中的數學節奏
- 數學概念：分數、比例、數列
- 課程內容：
 - 分析一首簡單的樂曲，討論音符長短與數學分數的關係。
 - 利用拍手或敲擊樂器創作不同節奏模式。
 - 用數列（如 1, 2, 3, 5）創作音符組合，並實際演奏。

五、文學藝術：國小中年級到高中

- 目標：學會數列與模式的應用。
- 課程主題：詩歌與數學結構
- 數學概念：數列、對稱、圖表
- 課程內容：
 - 創作簡單的數學詩（如每行字數為 1、2、3、5，對應費氏數列）。
 - 探討對稱在詩歌中的表現（如押韻模式 ABBA）。
 - 設計一個文字頻率統計圖，觀察哪些字最常出現。

六、戲劇藝術：國中到高中

- 目標：理解數學在空間設計中的應用。
- 課程主題：設計數學舞台
- 數學概念：座標平面、對稱、空間幾何
- 課程內容：
 - 在座標平面上設計舞台佈景，確保燈光分佈對稱。
 - 用立體紙模型設計舞台背景，學習基本幾何形狀的結構。
 - 討論光的反射與角度，讓學生試著用鏡子設計光路。

七、電影藝術：國小高年級到高中

- 目標：了解數學變換與動畫的結合。
- 課程主題：動畫中的數學魔法
- 數學概念：平移、旋轉、比例縮放
- 課程內容：
 - 教學生用免費動畫工具（如 Scratch）設計簡單動畫。
 - 討論數學變換（如平移、旋轉）如何影響角色的運動。
 - 計算動畫中角色的移動速度與時間關係。

八、舞蹈藝術：國小高年級到高中

- 目標：學會用數學分析與設計動作。
- 課程主題：用數學編排舞蹈
- 數學概念：對稱、時間節奏、隊形與移動路徑設計

➤ 課程內容：

- 設計一段舞蹈動作，動作需要遵循特定的數學規則（如左右對稱）。
- 計算每個動作的持續時間，並與音樂節拍匹配。
- 在方格紙上畫出舞蹈的路徑設計，理解隊形或路徑規劃。

藝術與數學跨領域結合的優點與挑戰

藝術與數學的跨領域結合，是對人類創造力與邏輯思維的雙重探索。從上述中可以看出藝術與數學具有以下關聯性：

- 一、藝術源於生活，數學是其內在的邏輯基礎。
- 二、藝術的表現力，讓數學從抽象走向具象。
- 三、藝術與數學的融合，既是統一又保持獨立。

這三個關聯性可以啟發我們逐步進行藝術與數學跨領域教學設計。在第一步，我們可以從藝術中挖掘出豐富的數學元素，將藝術視為數學的載體。通過藝術的創作與欣賞，學生能以感性視角接觸數學，理解其在日常生活和文化中的深遠影響。

第二步，藝術不僅是數學的展示，更是傳遞數學的一種新語言。當抽象的數學概念以藝術形式展現時，數學的邏輯變得更加具體且富有故事性。例如，利用動畫展示幾何變換，或用舞蹈表現數列的循環結構，這些創作讓數學不再只是公式與理論，而是能被直觀感知的經驗。這種「藝術敘述數學」的方法，不僅能幫助學生克服對數學的畏懼，還能激發其學習的興趣。

第三步，藝術與數學的結合應該是一種互相成就、又保持各自特性的融合。這種結合就像太極圖由黑白區塊構成，不是融合成為灰色，而是既互相滲透又各自獨立，少了其中一色便不完整了，形成有機的整體性，不改變初衷又不妥協。數學可以為藝術創作提供結構與秩序，而藝術則能賦予數學以感性與生命力，這種相輔相成的模式，使兩者不僅增強了自身價值，也激發了無限的創意可能性。

然而，這種結合也面臨不少挑戰。首先，在教育設計上，兩者有截然不同的目標和教學方法，如何找到平衡點是難題。數學偏向精確性和邏輯性，而藝術強調自由表達和創造力，過於融合可能導致兩者特性模糊，難以達成教育目標。其次，師資問題亦是挑戰之一，教師往往專注於某一領域，缺乏跨領域知識背景，這對課程的設計與實施帶來困難。最後，學生的接受度也需考量，部分學生可能對數學抱有畏懼，或對藝術缺乏興

趣，如何讓這些學生在跨領域課程中找到共鳴，是實施中的重要關鍵。

藝術與數學的融合是開啟創意教育的鑰匙，但需要克服理論與實踐中的種種挑戰，才能真正發揮其潛力，培養學生在邏輯與感性之間自由切換的能力，為未來的創新提供堅實基礎。

謝佳叡

國立臺北教育大學數學暨資訊教育系副教授

參考資料

- [1] Aharoni, R. (2019)_. 數學詩與美。(Mathematics, Poetry and Beauty; 蔡聰明譯)。臺北：三民書局
- [2] 瑞慶山 香佳 (2019)。 數學圖形素描教室：用旋轉曲面、多面體、拓樸形狀來創作！（数学デザイン教室 描いて楽しむ数学のかたち；陳朕疆譯）。臺北：台灣東販
- [3] Gamwell, L. (2015). Mathematics + Art: A cultural history. Princeton University Press
- [4] Hofstadter, D. R. (1999). Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid. Basic Books Press
- [5] Martínez, G. (2006). The Oxford Murders. Penguin Group USA.
- [6] Peterson, I. (2001). Fragments of infinity: a kaleidoscope of math and art. Canada: John Wiley & Sons, Inc.